吉林大学

本科生毕业论文（设计）

中文题目 Van Est 定理及其应用

英文题目 Van Est Theorem and its Applications

学生姓名 田泽禹 班级 101908 学号 10190615

学　　院 数学学院

专　　业 数学与应用数学

指导教师 生云鹤 职称 教授

摘　要

在本文中, 我们将研究经典 Van Est 定理以及李 2 群与李 2 代数上的 Van Est 定理. 通过考虑李群与李代数的 Van Est 双复形, 我们使用 de Rham 上同调控制了李群与李代数的上同调的关系. 为得到类似过程, 我们在群胚上引入了 2 线性空间作为平展结构, 再引入李 2 群与李 2 代数以及其上的 2 表示与上同调, 在其交叉模的等价语言下证明了李 2 群与李 2 代数特殊情况下的 Van Est 定理. 为此, 文章在第二章引入了范畴论和同调代数的必要语言, 以及李群与李代数的经典定理与性质等前置知识. 此外本文中我们也得到了 Chevalley-Eilenberg 上同调与分次代数的联系, 并使用 Van Est 定理具体计算了几个低维李代数的李群.

关键词： 李群与李代数;　Van Est 定理;　范畴论

ABSTRACT

In this paper, we will study the classical Van Est theorem and the Van Est theorem on Lie 2–groups and Lie–2 algebras. By considering the Van Est double complex of Lie groups and Lie 2–algebras, we use de Rham cohomology to control the relation between Lie groups cohomology and Lie algebra cohomology. In order to obtain a similar process, we introduce 2–linear spaces on groupoids as flat structures, and introduce Lie 2–groups and Lie 2–algebras, and 2–representations and cohomology on them. The Van Est theorem of Lie 2 groups and Lie 2 algebras is proved with the language of crossed modules in the special case. In this paper, we also obtained the connection between Chevalley-Eilenberg cohomology and graded algebras, and used Van Est theorem to calculate the Lie groups of several specific low-dimensional Lie algebras.

Key Words: Lie groups and Lie algebras, Van Est's theorem, Category theory

目 录

第 1 章 引言

1.1 问题背景

对称性一直是数学研究中的重要命题, 代数学在漫长时间中都主要研究多项式方程的求解, 而五次代数方程求解的问题长时间悬而未决. 直至十九世纪, 以 Abel, Lagrange, Ruffini 为代表的数学家们在研究对称性中模糊出群的概念, 而伽罗瓦在 19 世纪 30 年代首次抽象并建立了群的概念与体系, 并使用群理论解决了多项式方程的代数可解性的刻画.

在 1870 年前后, Sophus.Lie 在求解微分方程时引入了连续变换群的概念, 并使用其来阐明微分方程的解，将微分方程进行分类. 1874 年, 他建立了连续变换群的一般理论, 也就是如今所称的李群. 同时他考虑群单位元处的切空间来刻画群结构, 进而导出如今称为李代数的代数结构, 并发现其四种主要类型. Sophus.Lie 的工作开创并推动了李群与李代数的发展.

李群理论在最初时间内仅与一些微分方程有联系, 在 19 世纪末, 李群理论在代数学和拓扑学得到了迅速的发展, 成为了数学的一个重要分支. 20 世纪 50 年代, 代数群论和代数几何的方法将李理论的发展推入了一个新的阶段, 揭示了李群与函数论, 数论等理论之间的深刻联系. 在现代的观点下, 李理论通过李变换群与几何学, 拓扑学联系; 通过线性表示论与代数学, 分析学联系. 李群在数学物理以及量子物理中也有着重要应用. 李代数作为李群的一个局部结构, 通过李括号和李群的全局结构约束在一起. 李代数作为非结合代数, 其概念本身也得到了充分的抽象和研究. 单李代数的分类, 根系和李代数表示是李代数理论中精彩的问题. 李代数如今在数学以及古典力学, 量子力学中有重要的应用. 现在李代数不再仅仅被理解为群论问题线性化的工具, 其还是有限群理论及线性代数中许多重要问题的来源. 李群与李代数的理论各有丰富的成果, 两结构间的关系便自然成为重要的研究命题.

在经典李理论中, 李群是连续且全局的, 而李代数是离散且局部的, 数学中一重要命题便是衡量二者间的关系. 李群可以局部微分得到李代数, 而李的第三定理保证有限维李代数积分成为一个李群. 此定理的一个传统证明是利用 Ado 定理, 将李代数嵌入为有限维线性李代数, 再通过李子群与李子代数的对应关系得到所求解. 经典方法往往涉及复杂的分析学手段. 1953 年, W. T. Van Est 发表了一篇有关李群与李代数上同调的论文, 在此论文中他构造了李群的群上同调到李代数上同调的 Van Est 映射, 并使用 de Rham 上同调来控制 Van Est 映射的性质. 由于群扩张, 李代数扩张的等价类与其二阶上同调群有一一对应. 作为推论, 在一定条件下, 对于给定的李代数扩张我们可以找到其李群扩张, 进而从几乎纯几何与代数的方法得到李的第三定理的证明. 也正因此 Van Est 的方法极富有拓展性. 目前 Van Est 定理的研究内容扩展到范畴

上, 进而产生了李 2 群, 李 2 代数, 李群胚上的 Van Est 定理一系列丰富的结果.

1.2 文章结构与结果

在本文中, 我们将首先将在第二章 [2.3] 给出李群与李代数的必要前置知识, 给出李群和李代数的关系, 以及李群李代数各自的一部分性质. 由于我们将在 [3.1] 使用不同上同调结构, 为此我们在 [2.4] 提前给出上同调的一般定义, 并给出同调代数中我们所需的部分定理. [2.5] 中代数拓扑的定理和公式主要保证了 Van Est 定理中我们所需的李群的上同调连通性, 在经典理论中其体现在 [3.5] 中的 k–连通, 而在 [4.5] 讨论李 2 结构时其体现在需要李 2 群神经中的每个李群的连通性.

在第三章我们主要证明经典 Van Est 定理. 在 [3.1] 我们首先引入李群与李代数的表示, 从而得到 de Rham 上同调, Chevalley-Eilenberg 上同调与群上同调的结构. 在 [3.2] 我们证明李群与李代数的二阶上同调与其扩张具有一一对应, 从而考虑扩张时仅需转化为二阶同调群. 在 [3.3], [3.4] 我们引入 Van Est 双复形并得到李群上同调到李代数上同调的 Van Est 映射. 在 [3.5] 我们计算 Van Est 映射的核, 并使用 de Rham 上同调来控制 Van Est 映射, 最终得到 Van Est 定理. 在第三章的结尾 [3.6], 我们引入范畴的神经与叶理上同调来从更高的观点解释我们前述结构的构造来源. 在第五章我们使用 Van Est 定理证明中的映射, 具体地将两个低维李代数积分成其李群.

在第四章我们将 Van Est 定理推广至李 2 群与李 2 代数, 所有的 2 结构讨论都依赖于 [2.1] 中介绍的范畴论. 我们在 [4.2] 分别给出李 2 群与李 2 代数的定义, 并由等价性将问题转化到交叉模讨论. 为得到 2 结构中的平坦结构并定义李 2 群与李 2 代数的表示, 我们在 [4.1] 中定义 2 线性空间, 并得到其线性函子与线性自然变换构成李 2 代数. 为得到经典理论中的类似讨论, 我们在 [4.4] 引入了李 2 群与李 2 代数的上同调与双复形. 最终在 [4.5] 特殊情况下得到李 2 群与李 2 代数的 Van Est 定理.

本文系统地介绍了李群与李代数的三类上同调, 即李群的群上同调, de Rham 上同调与 Chevalley-Eilenberg 上同调, 并通过对偶映射的方法将 Chevalley-Eilenberg 上同调与分次代数联系. 本文系统整理了李群与李代数二阶上同调与扩张的关系, 补充了相关细节. 关于 Van Est 原论文, 本文将其中的记号缺漏, 符号歧义以及定义模糊的地方予以修正, 并使用神经, 叶理上同调, 谱序列的观点重新解释. 本文关注李 2 群与李 2 代数结构上的结果, 并补充了部分细节的证明. 最后本文末章使用经典 Van Est 定理具体计算了两例低维数李代数的积分, 并从中展示抽象群结构之间的同构.

第 2 章 前置知识

2.1 范畴论

为刻画不同结构之间的联系, 我们在此直接引入范畴的概念. 一个范畴形容具有一类特征的对象全体, 而范畴间的函子, 函子间的自然变换则刻画不同类对象间的关系. 为便于叙述, 在本节中我们假定所有出现的对象所构成的全体均可以以集合刻画, 进而规避掉类的问题, 而这本质上不会影响我们讨论的问题.

范畴的定义有许多方法, 为和下文的思想一致, 我们定义:

定义 2.1.1 (范畴). 一个范畴 $\mathcal{C}$ 指如下的结构整体:

(i) 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 其中的元素称为 $\mathcal{C}$ 的**对象**.

(ii) 集合 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, 其中元素称为 $\mathcal{C}$ 的**态射**, 以及一对映射 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 其中 s 和 t 分别给出态射的**来源**和**目标**. 对于 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) := s^{-1}(X) \cap t^{-1}(Y)$, 称为 X 到 Y 的态射.

(iii) 对于任一态射 X, 有元素 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$, 称为 X 到自身的恒等态射.

(iv) 态射间的复合:

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), \\ (f,g) &\longmapsto f \circ g. \end{aligned}$$

一般直接记为 fg, 其满足:

(a) 结合律: 对于任意态射 $h, g, f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, 若复合 $f(gh)$ 和 $(fg)h$ 都有定义, 则:

$$f(gh) = (fg)h.$$

故两边可以同写为 $f \circ g \circ h$ 或 fgh;

(b) 对于任意态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, 有:

$$f \circ \mathrm{Id}_X = f = \mathrm{Id}_Y \circ f.$$

在此定义中我们要求了 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 为集合, 范畴在这两资料非集合时也可无矛盾地定义, 避免赘述在此略去.

例 2.1.1. 如下常见的结构构成范畴:

- 所有的集合构成范畴 **Set**, 其中的态射为集合间的集合映射.
- 所有的线性空间构成范畴 **Vect**, 其中的态射为线性空间间的线性映射.

- 所有的群构成范畴 **Grp**, 其中的态射为群同态.
- 一个给定的群 G 自身为一个范畴 **BG**, 其对象为单点, 自身上的态射为 G 中的元素, 复合为群乘法.
- 一个偏序集 $(P, \leq)$ 构成一个范畴 **P**, 其对象为偏序集中的元素, X 到 Y 有态射当且仅当 $X \leq Y$, 且此时态射唯一.

为研究不同结构间的关系, 我们引入范畴间函子的概念:

定义 2.1.2 (函子). 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为范畴, 一个 *(协变)* 函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 指*:*

(i) 对象间的映射 $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

(ii) 态射间的映射 $F : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$, 满足下列条件*:*

  (a) 对任意 $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$, F 将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 映入 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$,

  (b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{FX}$.

函子之间的复合可以类似于态射定义, 事实上, 所有的小范畴构成了一个范畴, 其间的态射为函子.

进一步地, 函子之间仍可定义结构, 称为函子间的自然变换.

定义 2.1.3 (自然变换). 函子 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 之间的自然变换 α 是以 $\mathrm{Ob}(C)$ 为指标的一族态射

$$\alpha_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, GX), \quad X \in \mathrm{Ob}(C),$$

使得下图对所有态射 $f : X \to Y$ 交换.

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\alpha_X"] & FY \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
GX \arrow[r, "Gf"] & GY
\end{tikzcd}$$

一般将其记为*:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D}.
\end{tikzcd}$$

自然变换之间可以定义两类的复合, 分别称为纵复合和横复合, 其定义分别对应如下两则图:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd} \quad \text{纵复合为} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & \mathcal{D}.
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{C}' \arrow[r, bend left=50, "F'"] \arrow[r, bend right=50, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{C}''
\end{tikzcd}
\quad \text{横复合为} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, bend left=50, "F'\circ F"] \arrow[rr, bend right=50, "G'\circ G"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\beta*\alpha"] & & \mathcal{C}''.
\end{tikzcd}
$$

纵复合与横复合分别对应对象与态射意义下的

$$
\begin{tikzcd}
 & FX \arrow[d, "\alpha_X"] \arrow[dd, bend left=60, "(\beta\circ\alpha)_X"] \\
X \arrow[ur, bend left, "F"] \arrow[r, "G"] \arrow[dr, bend right, "H"'] & GX \arrow[d, "\beta_X"] \\
 & HX
\end{tikzcd}
$$

与

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F"] \arrow[dr, bend right, "G"'] & FX \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "\alpha_X"] \arrow[dr, bend right, "G'"] & F'FX \arrow[d, "\beta_{FX}"] \arrow[dd, bend left=60, "(\beta*\alpha)_X"] \\
 & GX \arrow[dr, bend right, "G'"] & G'FX \arrow[d, "G'\alpha_X"] \\
 & & G'GX
\end{tikzcd}
$$

2.2 微分流形

拓扑群是一般的连续变换群, 其连续性需要在拓扑空间上定义, 而李群则考虑的是局部欧式空间的连续变换群, 即微分流形作为连续变换群, 我们引入微分流形的基本内容, 以便后续的讨论. 在本文中, 我们所指的微分流形均定义为 C^∞ 微分流形.

2.2.1 定义与实例

定义 2.2.1 (局部欧式空间). 一个 d 维局部欧氏空间指一个 *Hausdorff* 空间 M, 其中任意一点都存在一个邻域 U 同胚于 $\mathbb{R}^d$ 的一个开子集. 如果同胚映射 φ 是连通开集 U 上的, 则 φ 称为坐标映射.

定义 2.2.2 (微分结构, 或极大地图册). 一个局部欧氏空间 M 上的 C^∞ 微分结构 $\mathscr{F}$ 指一列坐标卡 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$, 其中 A 为指标集, 满足如下条件:

(i) $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$, 即 $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 M 的开覆盖,

(ii) 对于任意 α, β, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$ (若有定义) 是 C^∞ 映射,

(iii) $\mathscr{F}$ 关于 (ii) 的相容性是极大的.

定义 2.2.3 (微分流形). 一个 n 维 C^∞ 微分流形指一对 $(M, \mathscr{F})$, 其中 M 为第二可数的 n 维局部欧氏空间, $\mathscr{F}$ 为 M 上的 C^∞ 微分结构, 称为光滑流形.

微分结构可以由一个相容的地图册生成, 这是由于极大地图册的存在性可由选择公理保证. 我们给出微分流形一些简单例子.

例 2.2.1. 以下的结构均为光滑流形:

- 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$, 其中微分结构 $\mathscr{F}$ 取为包含 $(\mathbb{R}^n, i)$ 的极大地图册, 其中 $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是单位映射.
- n 维球面 $S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$, $n = (0, \ldots, 0, 1)$, $s = (0, \ldots, 0, -1)$, 利用球极投影可得两坐标投影 $(S^n - n, p_n)$ 和 $(S^n - s, p_s)$, 此时微分结构 $\mathscr{F}$ 为包含两坐标卡的极大地图册.
- 一般线性群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, 其微分结构定义为, 将其视为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间, 则作为拓扑空间为开集, 继承 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的微分流形结构, 这是一个标准的李群.

定义 2.2.4 (浸入, 子流形, 嵌入). 设光滑映射 $\varphi : M \to N$, 有

(i) 若 $d\varphi$ 处处是单射, 则称 (M, φ) 是浸入;

(ii) 若 φ 是单射, 且 (M, φ) 为浸入, 则称 (M, φ) 为子流形;

(iii) 若 (M, φ) 为子流形, 且 φ 是 M 和 $\varphi(M)$ (取相对拓扑) 的微分同胚, 则称 (M, φ) 为嵌入.

2.2.2 光滑映射、切向量与微分

定义 2.2.5 (光滑映射). 称 m 维微分流形 M 到 n 维微分流形 N 的映射 f 为光滑映射, 当且仅当对于任意 M 的坐标卡 (U, φ), 以及 N 的坐标卡 (V, ϕ), 有 $\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \phi^{-1}(V)$ 为欧氏空间中的光滑映射.

在欧式空间中, 一点处的向量给出了可微函数的方向导数, 据此我们可以定义微分流形上的切向量.

定义 2.2.6. 微分流形上 $m \in M$ 处的切向量 v 定义为 m 邻域上可微函数芽代数的线性导子, 即对任意在 m 函数芽 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathbf{F}_m$, $a, b \in \mathbb{R}$ 有

(i) $v(a\boldsymbol{f} + b\boldsymbol{g}) = av(\boldsymbol{f}) + bv(\boldsymbol{g})$,

(ii) $v(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}) = f(m)v(\boldsymbol{g}) + g(m)v(\boldsymbol{f})$.

将 m 处的切向量的空间记为 T_mM, 其构成线性空间, 加法与数乘定义为:

$$(v+w)(\boldsymbol{f}) = v(\boldsymbol{f}) + w(\boldsymbol{f}),$$
$$(\lambda v)(\boldsymbol{f}) = \lambda(v(\boldsymbol{f})).$$

其中 f 为 m 邻域内定义的可微函数, $v, w \in T_mM$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

考虑切空间的维数, 可以得到如下定理:

定理 2.2.1. 对于光滑流形, 有 $\dim T_mM = \dim M$.

定理的证明可见 [1] P17, 定理 1.17. 此时对于任一坐标卡, 我们可以具体写出切向量的基底.

定义 2.2.7. (U, φ) 是 m 维光滑流形 M 的一个坐标卡, 坐标函数为 $x_1, \ldots, x_m$. 定义 $(\partial/\partial x_i)|_m$ 为

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m\right)(f) = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}\right|_{\varphi(m)},$$

则可证明其构成 T_mM 的一组基底.

下面我们介绍光滑函数的微分.

定义 2.2.8 (微分). 设 $\psi : M \to N$ 为光滑映射, 且设 $m \in M$. 则可以导出 ψ 在切空间上的线性映射, 称为 ψ 在 m 处的微分:

$$d\psi : T_mM \longrightarrow T_{\psi(m)}N.$$

其由如下表达式定义, 设 $v \in T_m(M)$, g 为 $\psi(m)$ 邻域上的光滑函数, 有:

$$d\psi(v)(g) = v(g \circ \psi).$$

由线性映射 $d\psi : T_mM \to T_{\psi(m)}N$, 可得其对偶映射 $\delta\psi : T^*_{\psi(m)}N \longrightarrow T^*_mM$ 为

$$\delta\psi(\omega)(v) = \omega(d\psi(v)), \quad \omega \in T^*_{\psi(m)}N,\, v \in T_mM.$$

2.2.3 切丛与余切丛

我们可以说明微分流形及其上所有的切向量也可以构成一微分流形, 称为切丛. 同理考虑微分流形及其切向量的对偶空间, 可以定义其对偶, 称为余切丛.

定义 2.2.9. 设 M 为光滑流形, 其微分结构为 $\mathscr{F}$, 令

$$T(M) = \bigcup_{m \in M} T_m M,$$
$$T^*(M) = \bigcup_{m \in M} T_m^* M.$$

以及自然投射:

$$\pi : T(M) \to M, \quad \pi(v) = m \quad \text{当} \quad v \in T_m M,$$
$$\pi^* : T^*(M) \to M, \quad \pi^*(\omega) = m \quad \text{当} \quad \omega \in T_m^* M.$$

当 $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$ 为 n 维光滑流形 M 的坐标卡时, 取坐标函数 $x_1, \ldots, x_n$. $v \in TM, \omega \in T^*M$, 切丛和余切丛上的坐标函数 $\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^*$ 为:

$$\tilde{\varphi}(v) = (x_1(\pi(v)), \ldots, x_n(\pi(v)), dx_1(v), \ldots, dx_n(v)) \in \mathbb{R}^{2n},$$
$$\tilde{\varphi}^*(\omega) = \left(x_1(\pi^*(\omega)), \ldots, x_n(\pi^*(\omega)), \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \ldots, \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \right) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

为刻画光滑流形 M 上的切向量和余切向量的一个分布, 我们可以引入截面的概念. 一般的截面概念定义在纤维丛上, 而切丛和余切丛均为微分流形上的纤维丛, 因此此处定义是一致的.

定义 2.2.10 (切丛上的截面)**.** 设光滑流形 M 的切丛为 TM, 投影 π 的一个截面 s 定义为映射 $s : M \to TM$, 满足 $(\pi \circ s)|_M = \mathrm{Id}_M$.

定义 2.2.11 (余切丛上的截面)**.** 光滑流形 M 的余切丛为 T^*M, 投影 π^* 的一个截面 s 定义为映射 $s : M \to T^*M$, 满足 $(\pi^* \circ s)|_M = \mathrm{Id}_M$.

定义 2.2.12 (光滑向量场)**.** 光滑流形 M 上的光滑向量场 X 指 M 到 TM 的光滑截面 X, 即 $X \in C^\infty(M, TM)$.

对于 M 上的光滑向量场 X 和任意光滑函数 f, Xf 定义了 M 上的光滑函数: $(Xf)(m) = X_m f$, $m \in M$. 事实上此命题是可逆的, 即若向量场 X 使得任意光滑函数 f, Xf 都是光滑函数, 则 X 本身是光滑的.

将 M 上的光滑向量场记为 $\mathfrak{X}(M)$, 其上可以定义李括号运算. 设 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, 我们定义:

$$([X, Y]f)(m) = [X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf).$$

可以验证此时有 $[X,Y]\in\mathfrak{X}(M)$. 进而考虑切空间对偶空间的外代数, 定义:

$$\textstyle\bigwedge_k^* M := \bigwedge^k T^*M := \bigcup_{m\in M} \bigwedge^k T_m^* M,$$
$$\textstyle\bigwedge^* M := \bigwedge T^*M := \bigcup_{m\in M} \bigwedge T_m^* M.$$

定义 2.2.13 (微分形式)**.** 光滑流形 M 到 $\bigwedge_k^* M$ 的光滑映射称为 k 次微分形式, 到 $\bigwedge^* M$ 的光滑映射称为微分形式.

2.3 李群与李代数

2.3.1 定义与实例

定义 2.3.1. 一个李群是一个光滑流形, 同时是一个群, 使得群运算 $G\times G\to G$, $(\sigma,\tau)\mapsto\sigma\tau^{-1}$ 是 C^∞ 的 (该定义等价于群乘法 $(g,h)\mapsto gh$, 取逆映射 $g\mapsto g^{-1}$ 是 C^∞ 的).

例 2.3.1. 我们给出李群的一些例子.

- n 维线性空间 $V=\mathbb{R}^n$, 群乘法维向量加法, 取逆为向量逆元.
- S^1 视为模为 1 的复数, 群乘法为复数乘法, 取逆为复数取逆.
- $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 其结构入前文所述.

定义 2.3.2. 一个实李代数是一个实线性空间 $\mathfrak{g}$, 其上有一个运算, 称为李括号 $[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 满足如下性质:

(i) $[\,,\,]$ 是双线性映射,

(ii) 反对称: $[x,y]=-[y,x]$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$,

(iii) *Jacobi* 恒等式: $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$. $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.

例 2.3.2. 我们给出李代数的一些例子.

- 光滑流形 M 上的光滑向量场 $\mathfrak{X}(M)$ 是一个李代数.
- 任意一个线性空间 V 是一个李代数, 其中李括号定义为 $[x,y]=0,\forall x,y\in\mathfrak{g}$, 此时李代数称为交换李代数, 也成为 *Abel* 李代数.
- $n\times n$ 维实矩阵的线性空间成为一个李代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, 其中李括号定义为 $[A,B]=AB-BA$.

李群与李代数均可以做笛卡尔积, 其直积空间均保持原有结构.

2.3.2 李群的李代数

我们导出李群的李代数, 首先我们定义李群上的平移变换.

定义 2.3.3. *设 $g \in G$, G 上的左移变换 l_g 与右移变换 r_g 分别为微分同胚:*

$$l_g(h) = gh,$$
$$Sr_g(h) = hg.$$

G 上的向量场 X(不一定光滑) 称为左不变向量场, 如果其对于任意 $g \in G$ 满足

$$dl_g \circ X = X \circ l_g.$$

则李群上左不变向量场的任意一处的切向量均可由原点处的切向量唯一确定.

命题 2.3.1. *记左不变向量场为 $\mathfrak{X}_{linv}(M)$ 我们有如下性质:*
(i) $\dim \mathfrak{X}_{linv}(M) = \dim G_e = \dim G$;
(ii) $\mathfrak{X}_{linv}(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$, *即左不变向量场为光滑向量场;*
(iii) *左不变向量场的李括号仍为左不变向量场.*

右不变向量场的讨论同理, 由此我们可以定义:

定义 2.3.4 (李群的李代数)**.** *李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 定义为李群的左 (或右) 不变向量场, 其李括号定义为光滑向量场的李括号.*

例 2.3.3. *我们给出上述例中部分李群的李代数.*
- *有限维线性空间 $V = \mathbb{R}^n$ 的李代数为交换李代数 V.*
- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *的李代数为* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

继而可以李群与李代数结构上的同态与子结构.

定义 2.3.5 (李群同态)**.** *$\varphi : G \to H$ 称为李群的同态, 若 φ 作为微分流形的映射是 C^∞ 的, 同时作为群的映射为群同态. $H = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 时称 φ 为李群 G 的一个实表示.*

定义 2.3.6 (李代数同态)**.** *$\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 称为李代数的同态, 若 ψ 是线性空间的线性映射, 同时保李括号, 即 $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, 有 $\psi[X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)]$. $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 时称 ψ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个实表示.*

不加证明地, 我们有定理:

定理 2.3.2. *设 G 与 H 为李群, 其李代数分别为 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{h}$, 若 $\varphi : G \to H$ 为李群同态, 则 $d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 为李代数同态.*

定义 2.3.7 (李子群)**.** *(H, ψ) 称为李群 G 的李子群, 若:*

(i) H 是一个李群,

(ii) $\psi : H \to G$ 是一个群同态,

(iii) (H, ψ) 是 G 的子流形.

定义 2.3.8 (李子代数, 理想)**.** 称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的李子代数, 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空间, 且关于 $\mathfrak{g}$ 上的李括号封闭, 即 $\forall x, y \in \mathfrak{h}, [x, y] \in \mathfrak{h}$; 称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 理想, 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空间, 且关于 $\mathfrak{g}$ 上的李括号吸收, 即 $\forall x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}, [x, y] \in \mathfrak{h}$.

2.3.3 李群与李代数的关系

在李群与李代数的一般理论中, 我们不加证明地列举其中经典且重要的结论, 其证明可见 [1] P95-101.

李群的连通李子群, 与其李代数的李子代数具有对应关系:

定理 2.3.3. 设 G 为李群, 其李代数为 $\mathfrak{g}$, 设 $\tilde{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ 为李子代数. 则存在 G 的唯一的连通李子群 (H, φ) 使得 $d\varphi(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.

为进一步得到李代数所刻画的李群, 我们引入代数拓扑的一些结论.

定理 2.3.4. X 是道路连通, 局部道路连通, 半局部单连通的拓扑空间, 则 X 存在泛覆叠空间 $\tilde{X}$.

李群满足如上定理中的条件, 由此我们可以得到李群 G 的泛覆叠空间 $\tilde{G}$, 其上可以赋予李群结构并得到:

定理 2.3.5. 每个连通李群都有单连通的覆叠空间, 其本身构成一个李群, 且覆盖映射是李群的同态. 此泛覆叠空间的李代数与原李群的李代数相同.

此定理说明, 对于任意李代数 $\mathfrak{g}$, 若我们能找到李群 G 使得 G 的李代数为 $\mathfrak{g}$, 则由前述定理可以找到 $\mathfrak{g}$ 对应的连通李群, 进而由上述定理可以得到 $\mathfrak{g}$ 对应的单连通李群. 下面我们说明单连通李群的性质.

定理 2.3.6 (李代数同态的积分)**.** 设 G 和 H 均为李群, 其李代数分别为 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$, 且 G 为单连通李群. 设 $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 为李代数的同态, 则存在唯一的李群同态 $\varphi : G \to H$ 使得 $d\varphi = \psi$.

限制在单连通李群体上, 我们有:

定理 2.3.7. 若单连通李群 G, H 的李代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 是同构的, 则李群 G, H 同构.

2.3.4 指数映射与伴随表示

给定 $X \in \mathfrak{g}$, 我们可以定义映射:

$$\mathbb{R} \to \mathfrak{g}, \quad \lambda \frac{d}{dr} \mapsto \lambda X.$$

则根据定理2.3.6, 我们可以将其积分到其李群上的唯一同态:

$$\exp_X : \mathbb{R} \to G.$$

使得 $d\exp_X(\lambda(d/dr)) = \lambda X$. 再定义映射 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 为 $\exp(X) = \exp_X(1)$, 称为指数映射. 可以证明该映射是 C^∞ 的, 且由反函数定理, 可以得到 exp 给出 $\mathfrak{g}$ 中 0 的某个邻域 U 和 G 中 e 的某个邻域 V 的微分同胚.

同时我们可以证明:

定理 2.3.8. *设 $\varphi : G \to H$ 为李群同态, 则下图交换:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] & G \\ \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\varphi"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \end{tikzcd}$$

且有:

定理 2.3.9. *设 H 是李群 G 的抽象子群, 且 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子空间. 设 U 是 $\mathfrak{g}$ 中 0 处的邻域, V 是 G 中 e 处的邻域, 且 U, V 在指数映射下同胚. 假设有:*

$$\exp(U \cap \mathfrak{h}) = H \cap V.$$

则在相对拓扑下 H 是李群 G 的一个李子群, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的李子代数, 且为 H 的李代数.

由此定理可知, 已知李子代数, 李子群在单位元附近的性态可以由作指数映射的方式刻画.

下面我们考虑伴随表示, 李群在其自身上有一内自同构:

$$a : G \times G \to G, \quad a(g, h) = ghg^{-1} = a_g(h).$$

单位元在此内自同构下为不动点, 因此可以得到 G 到 $\mathfrak{g}$ 上的表示:

$$g \mapsto da_g|_{G_e} = da_g|_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).$$

记为 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. 设 $d(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$, 则有:

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{ad}"] & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "a_g"] & G \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{Ad}_g"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}
$$

2.4 同调代数

我们将在一般的 Abel 范畴上讨论, 而我们将应用定理的范畴均为 Abel 范畴, 因此以下的结果均是成立的. 首先我们定义加性范畴.

定义 2.4.1 (加性范畴)**.** *一个加性范畴 $\mathcal{C}$ 指一个范畴 $\mathcal{C}$, 满足如下性质:*

(i) *对所有对象对 $X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 是一 Abel 群, 且态射复合是双线性的,*

(ii) *存在零对象 0, 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0) = 0$,*

(iii) *对所有对象对 $X, Y \in \mathcal{C}$, 其直积与直和均存在 (且在前两条件下, 直积与直和同构).*

此时定义核, 余核, 像, 余像. 设 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, 定义:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f) &:= \lim\left(X \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y\right), \\
\mathrm{Coker}(f) &:= \mathrm{colim}\left(X \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y\right), \\
\mathrm{Im}(f) &:= \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Coker}(f)\right), \\
\mathrm{Coim}(f) &:= \mathrm{Coker}\left(\mathrm{Ker}(f)\right).
\end{aligned}
$$

由此我们可以进一步定义 Abel 范畴:

定义 2.4.2 (Abel 范畴)**.** *加性范畴 $\mathcal{C}$ 被称为 Abel 范畴, 如果它满足如下条件*

(i) *对任意态射 $f: X \to Y$, $\mathrm{Ker}\, f$ 与 $\mathrm{Coker}\, f$ 均存在,*

(ii) *典范态射 $\mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ 是同构.*

此时为区分, 将 Abel 范畴记为 $\mathscr{C}$, 加性范畴记为 $\mathcal{C}$.

2.4.1 复形与正合列

定义 2.4.3. *一个加性范畴 $\mathcal{C}$ 中的复形 X 指一列 $\{X^n, \mathrm{d}_X^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 使得:*

$$
X^n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \mathrm{d}_X^n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, X^{n+1}),\ \mathrm{d}_X^{n+1} \circ \mathrm{d}_X^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.
$$

复形 (X, d_X^n) 到复形 (Y, d_Y^n) 的态射指一列 $\mathcal{C}$ 中的态射 $\{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 满足对任意 n, $f^n: X^n \to Y^n$, $\mathrm{d}_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ \mathrm{d}_X^n$.

我们将复形以及复形态射的范畴记为 $\mathbf{C}(\mathscr{C})$.

定义 2.4.4. 在 *Abel* 范畴 $\mathscr{C}$ 上, 定义

$$Z^k(X) = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_X^k, \quad B^k(X) = \operatorname{Im} \mathrm{d}_X^{k-1},$$
$$H^k(X) = \operatorname{Coker}(B^k(X) \to Z^k(X)).$$

分别称为 X 的 k 阶上闭链, k 阶上边缘, k 阶上同调 (若指标为从大到小, 则上同调称为同调). 若复形 X 使得 $H^n(X) = 0$, 则称 X 在 n 处正合, 若复形 X 在任意一处正合, 则此复形称为正合列.

定义 2.4.5. 在 $\mathbf{C}(\mathscr{C})$ 中的两复形间的态射 $f: X \to Y$ 称为零伦映射, 若存在 $\mathscr{C}$ 中的一列态射 $s^n: X^n \to Y^{n-1}$, 使得

$$f^n = s^{n+1} \circ \mathrm{d}_X^n + \mathrm{d}_Y^{n-1} \circ s^n.$$

若 $f - g$ 为零伦映射, 则称 f 和 g 同伦.

定义同伦范畴 $\mathbf{K}(\mathcal{C})$, 对象为所有 $\mathcal{C}$ 中的复形, 态射为复形态射的同伦类.

命题 2.4.1. 设 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 为 $\mathbf{C}(\mathscr{C})$ 中的正合列. 则存在 $\mathscr{C}$ 中上同调的长正合序列, 其中 δ 为连接映射.

$$\cdots \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(Y) \longrightarrow H^n(Z) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X) \longrightarrow \ldots$$

2.4.2 映射锥

设 $\mathcal{C}$ 为加性范畴, 且令 $f: X \to Y$ 为 $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ 中的态射. 我们定义 f 的映射锥:

定义 2.4.6. f 的映射锥 $M(f)$ 为 $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ 中的对象, 定义为:

$$M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n, \quad \mathrm{d}_{M(f)}^n = \begin{pmatrix} -\mathrm{d}_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & \mathrm{d}_Y^n \end{pmatrix}.$$

后者为列向量上的矩阵左乘.

定义 $X[k]^n = X^{n+k}$, $\mathrm{d}^n_{X[k]} = (-1)^k \mathrm{d}^n_X$. 此外定义两个态射: $\alpha(f): Y \to M(f)$ 和 $\beta(f) \to X[1]$, 其表达式为:

$$\alpha(f)^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Id}_{Y^n} \end{pmatrix},$$

$$\beta(f)^n = (\mathrm{Id}_{X^{n+1}}, 0).$$

由 [2] 第一章中三角范畴的讨论, 这样的映射锥本质上给出了一个标准的三角范畴, 其三角为 $X \xrightarrow{f} Y \to M(f) \to X[1]$. 而 $H^0(\cdot)$ 为 $\mathbf{K}(\mathscr{C})$ 上的上同调函子, 我们有映射锥的长正合序列:

$$\cdots \longrightarrow H^n(X) \xrightarrow{f^\#} H^n(Y) \longrightarrow H^n(M(f)) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X) \longrightarrow \dots$$

因此我们可以得到如下命题:

命题 2.4.2. *$H^k(M(f)) = 0$, $k \leq n$ 当且仅当 $f^{k\#}: H^k(X) \to H^k(Y)$ 在 $k \leq n$ 时为同构, 在 $k = n+1$ 时为单射.*

2.4.3 谱序列与双复形

谱序列的理论困难深奥, 其简单情况可见 [3]. 我们简单地描述一般情况下的过程及结果. 谱序列的目的为求给定复形的上同调, 我们可以先将复形中的对象分解为简单的结构即滤子, 并对每一页序列求上同调, 逐步得到每一页的上同调对象及态射, 由此诱导新的一页. 重复操作最终所得的上同调为操作极限的直和.

首先我们定义滤子的概念, 我们在本节中只考虑有限滤子的情形, 一般的情形在收敛性条件下仍成立. 将微分简记为 d, 单态射写为包含 $\subseteq$, 假设复形为:

$$\dots \xrightarrow{d} X^{n-1} \xrightarrow{d} X^n \xrightarrow{d} X^{n+1} \xrightarrow{d} \dots$$

则此复形的一个滤子指一列:

$$0 = X^{n,0} \subseteq X^{n,1} \subseteq X^{n,2} \subseteq \cdots \subseteq X^{n,m} = X^n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

满足 $dX^{n,p} \subseteq X^{n+1,p}$, $\forall n, p \in \mathbb{Z}$. 则我们有:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1,m} \arrow[r, "d"] & X^{n,m} \arrow[r, "d"] & X^{n+1,m} \arrow[r, "d"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{n-1,m-1} \arrow[r, "d"] \arrow[u] & X^{n,m-1} \arrow[r, "d"] \arrow[u] & X^{n+1,m-1} \arrow[r, "d"] \arrow[u] & \cdots \\
& \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \\
\cdots \arrow[r] & X^{n-1,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u] & X^{n,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u] & X^{n+1,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

取竖直方向的商, 即余像 $E_0^{s,l} = X^{s,l}/X^{s,l-1}$, 可以导出谱序列的第零页:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & E_0^{n-1,m} \arrow[r, "d_0"] & E_0^{n,m} \arrow[r, "d_0"] & E_0^{n+1,m} \arrow[r, "d_0"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_0^{n-1,m-1} \arrow[r, "d_0"] & E_0^{n,m-1} \arrow[r, "d_0"] & E_0^{n+1,m-1} \arrow[r, "d_0"] & \cdots \\
& \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & E_0^{n-1,0} \arrow[r, "d_0"] & E_0^{n,0} \arrow[r, "d_0"] & E_0^{n+1,0} \arrow[r, "d_0"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

此时可以证明, 如果继续做上同调, 我们有如下的态射的转移:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[dr, "d_1"] & E_1^{n-1,m} \arrow[dr, "d_1"] & E_1^{n,m} \arrow[dr, "d_1"] & E_1^{n+1,m} \arrow[dr, "d_1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[dr, "d_1"] & E_1^{n-1,m-1} \arrow[dr, "d_1"] & E_1^{n,m-1} \arrow[dr, "d_1"] & E^{n+1,m-1} \arrow[dr, "d_1"] & \cdots \\
\arrow[dr, "d_1"] & \vdots \arrow[dr, "d_1"] & \vdots \arrow[dr, "d_1"] & \vdots \arrow[dr, "d_1"] & \\
\cdots & E_1^{n-1,0} & E_1^{n,0} & E_1^{n+1,0} & \cdots
\end{tikzcd}
$$

此时得到第一页谱序列, 继续做上同调, 态射仍有转移:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[ddr, "d_2"] & E_2^{n-1,m} \arrow[ddr, "d_2"] & E_2^{n,m} \arrow[ddr, "d_2"] & E_2^{n+1,m} \arrow[ddr, "d_2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[ddr, "d_2"] & E_2^{n-1,m-1} \arrow[ddr, "d_2"] & E_2^{n,m-1} \arrow[ddr, "d_2"] & E_2^{n+1,m-1} \arrow[ddr, "d_2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[ddr, "d_2"] & E_2^{n-1,m-2} \arrow[ddr, "d_2"] & E_2^{n,m-2} \arrow[ddr, "d_2"] & E_2^{n+1,m-2} \arrow[ddr, "d_2"] & \cdots \\
& \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & E_2^{n-1,0} & E_2^{n,0} & E_2^{n+1,0} & \cdots
\end{tikzcd}
$$

抽象概括地, 谱序列为一列图 $\{E_r, d_r\}_{r\geq r_0}$, 使得对于任意 $r \geq r_0$, 有

(i) $d_r \circ d_r = 0$,

(ii) $E_{r+1} \simeq H^*(E_r, d_r)$, 为 E_r 关于 d_r 的上同调.

如此重复, 若在某种条件下谱序列收敛于 $E_\infty^{s,l}$, 则有:

$$H^n(X) = \bigoplus_{k=1}^{m} E_\infty^{n,k}.$$

即原复形的上同调, 等于谱序列极限的每列的直和.

如果我们考虑双复形 $X^{m,n}$ 的上同调 $H_{tot}(X)$, 则其对应的图表序列为:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
X^{3,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & X^{3,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & X^{3,3} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \dots \\
X^{2,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & X^{2,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & X^{2,3} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \dots \\
X^{1,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & X^{1,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & X^{1,3} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\partial"] & \dots
\end{tikzcd}$$

其中未标明的位置均为零对象. 取 $S^n = \bigoplus_{i+j=n} X^{i,j}$, $D^n : S^n \to S^{n+1}$ 定义为 $D^n = \bigoplus_{i+j=n} D^{i,j}$, $D^{i,j} = \partial + (-1)^i d$.

利用上述谱序列的语言, 我们可以取其滤子为关于 r 的 $X^{m,n\geq r}$, 此时我们得到的双复形谱序列为, 第零页:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
X^{3,1} \arrow[u, "\partial"] & X^{3,2} \arrow[u, "\partial"] & X^{3,3} \arrow[u, "\partial"] & \dots \\
X^{2,1} \arrow[u, "\partial"] & X^{2,2} \arrow[u, "\partial"] & X^{2,3} \arrow[u, "\partial"] & \dots \\
X^{1,1} \arrow[u, "\partial"] & X^{1,2} \arrow[u, "\partial"] & X^{1,3} \arrow[u, "\partial"] & \dots
\end{tikzcd}$$

谱序列第一页:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
E_1^{3,1} \arrow[r, "d_1"] & E_1^{3,2} \arrow[r, "d_1"] & E_1^{3,3} \arrow[r, "d_1"] & \dots \\
E_1^{2,1} \arrow[r, "d_1"] & E_1^{2,2} \arrow[r, "d_1"] & E_1^{2,3} \arrow[r, "d_1"] & \dots \\
E_1^{1,1} \arrow[r, "d_1"] & E_1^{1,2} \arrow[r, "d_1"] & E_1^{1,3} \arrow[r, "d_1"] & \dots
\end{tikzcd}$$

谱序列第二页 (部分映射未标明):

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[drr, "d_2"] & \vdots \arrow[drr, "d_2"] & \vdots & \\
E_2^{3,1} \arrow[drr, "d_2"] & E_2^{3,2} \arrow[drr, "d_2"] & E_2^{3,3} & \dots \\
E_2^{2,1} \arrow[drr, "d_2"] & E_2^{2,2} \arrow[drr, "d_2"] & E_2^{2,3} & \dots \\
E_2^{1,1} & E_2^{1,2} & E_2^{1,3} & \dots
\end{tikzcd}$$

如此操作下去, 在一定的收敛性条件下, 双复形的整复形的上同调等于对应谱序列对角线元素的直和.

2.5 代数拓扑

为得到 Van Est 定理, 我们需要一些同调群的计算方法, 以及李群同调群的结论.

2.5.1 同伦群与同调群

我们仅需要一阶同伦群性质, 即拓扑空间的基本群.

定义 2.5.1. *设拓扑空间 X, $x_0 \in X$ 为基点, 则 X 在 x_0 处的基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 定义为 x_0 处的回路的同伦类, 乘法定义为代表元道路的连结.*

当拓扑空间道路连通时, $\pi_1(X, x_0)$ 关于 x_0 是同构的. 为定义拓扑空间的同调, 如上述讨论, 我们仅需要给出复形及微分映射 (或边缘算子). 我们在此使用奇异同调群, 即

$$X_n = C_n(X) := \mathrm{FreeAb}(C(\Delta^n, X)).$$

为所有 n 维单形到 X 上的连续映射生成的自由 Abel 群, $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n]$, 边缘算

子定义为 $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$, 使得若 $\sigma : \Delta^n \to X$, 有

$$\partial_n \sigma = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \sigma|_{[e_0,\dots,\hat{e}_k,\dots,e_n]} .$$

奇异上同调定义在奇异链复形的对偶上, 边缘算子为边缘算子的对偶. 在光滑流形上我们将定义 de Rham 上同调, 而根据 de Rham 定理, 对于任意光滑流形 M 和非负整数 k, de Rham 同态 $l : H^k_{dR}(M) \to H^k(M;\mathbb{R})$ 是同构. 因此在讨论李群的上同调时, 我们将不加区分地使用此两种上同调.

定理 2.5.1 (同伦不变性)**.** *基本群, 同调群, 上同调群均为同胚不变量, 同伦不变量.*

此外, 一阶同伦群与一阶同调群具有如下关系:

定理 2.5.2. *设 X 是道路连通的拓扑空间, 则 $\pi(X, x_0)$ 的 Abel 化同构于 $H_1(X)$.*

2.5.2 同调群的计算

我们给出计算同调群的几则定理, 其中定义与证明可见 [4].

定理 2.5.3 (Mayer-Vietoris)**.** *设拓扑空间的三元对 (X, A, B), A, B 为 X 的子空间, 其内部构成 X 的开覆盖. 则有长正合序列:*

$$\begin{aligned}\cdots \to H_{n+1}(X) &\xrightarrow{\partial_*} H_n(A\cap B) \xrightarrow{(i_*,j_*)} H_n(A)\oplus H_n(B) \xrightarrow{k_*-l_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} \\ &\xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A\cap B) \to \cdots \to H_0(A)\oplus H_0(B) \xrightarrow{k_*-l_*} H_0(X) \to 0\end{aligned}$$

定理 2.5.4 (同调群的泛系数定理)**.** *R 系数复形的同调群, 即 R 系数同调群满足以下可裂正合列:*

$$0 \to H_i(X;\mathbb{Z}) \otimes R \xrightarrow{\mu} H_i(X;R) \to \mathrm{Tor}_1(H_{i-1}(X;\mathbb{Z}), R) \to 0.$$

其中 μ 由 $H_i(X;\mathbb{Z}) \times R \to H_i(X;R)$ 诱导.

定理 2.5.5 (上同调群的泛系数定理)**.** *M 为 R 模, 则有以下可裂正合列:*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_R(H_{i-1}(X,R), M) \to H^i(X;M) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_R(H_i(X;R), M) \to 0.$$

其中

$$H_i(X;M) = (\ker \partial_i \otimes M)/(\mathrm{Im}\,\partial_{i+1} \otimes M),$$

$$H^i(X;M) = \ker(\mathrm{Hom}(\partial, M))/\mathrm{Im}\,(\mathrm{Hom}(\partial, M)).$$

定理 2.5.6 (Kunneth 公式). *设 X, Y 为拓扑空间, 则对于任意的正整数 k, 域 F 上的奇异同调群有同构:*

$$H_k(X \times Y; F) \simeq \bigoplus_{i+j=k} H_i(X; F) \otimes H_j(Y; F).$$

对于非奇异同调群, 有:

$$H^k(X \times Y; F) \simeq \bigoplus_{i+j=k} H^i(X; F) \otimes H^j(Y; F).$$

2.5.3 李群上的同调群

我们给出李群的上同调群的定理, 此定理在 Van Est 定理的证明中起重要作用. 其证明可见 [5] P77, 定理 1.14.2.

定理 2.5.7. *若 G 是单连通李群, 则 $H^2(G; \mathbb{R}) = 0$.*

第 3 章 经典 Van Est 定理

在本章中, 我们将证明 Van Est 定理, 并从另一视角得到新的证明. 在 Van Est 定理中, 我们所必须的构件为李群与李代数的表示, 李群与李代数的上同调, 二阶上同调的扩张性质与某些特殊的可积结构. 这些内容将在下文中一一引入.

3.1 李群与李代数的表示与上同调

3.1.1 李群与李代数的表示

我们假设 V 为有限维非零实线性空间. 则如前文提及的, 此处单列为定义:

定义 3.1.1. 设 V 为有限维线性空间, 则李群与李代数在 V 上的表示分别为:

(i) 李群的同态 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{GL}(V)$ 的李群结构如前文定义.

(ii) 李代数的同态 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{gl}(V)$ 的李代数结构如前文定义.

在 [6] Van Est 的方法中, 他引入了局部系统以定义其所使用的 de Rham 上同调, 我们在此引入其概念. 在本节中, 若不加说明, 所有的结构都假设为光滑的.

假设光滑流形 M 中任意两点 $s, t \in M$, 则 α_{ts} 表示 s 到 t 的道路的某一同伦类. $\pi(\alpha_{ts})$ 为线性空间 V 的一个自同构, 即 $\pi(\alpha_{ts}) \in \mathrm{Aut}(V)$, 满足 $\pi(\beta_{ut})\pi(\alpha_{ts}) = \pi(\beta_{ut}\alpha_{ts})$. 如果 U 是 s 的单连通邻域, 则对任意 $t \in U$, 定义 $\gamma_{U,s} : \gamma_{U,s}(t) = \pi(\alpha_{ts})$. 此映射将 U 映射到 $\mathrm{Aut}(V)$.

假设上述定义的 $\gamma_{U,s}$ 对于所有的 s 和其单连通邻域 U 都是光滑的, 此时我们称 M 具有局部系统 (V, π). 并由假设, 我们对于任意 s 处的切向量, 可以定义 $\pi(Y) = Y\gamma_{U,s}$[1], 此时 $\pi(Y) \in \mathrm{End}(V)$, 其不依赖于单连通邻域 U 的选取. 对于任一 M 上的任意向量场 X, 定义:

$$\pi(X)(s) = \pi(X_s).$$

则有 $t, s \in U$ 时:

$$\begin{aligned}\pi(X)(t) \cdot \gamma_{U,s}(t) &\xlongequal{def} X_t\gamma_{U,t} \xlongequal{def} (d\gamma_{U,t}(\cdot))\, X_t \cdot \gamma_{U,s}(t) \xlongequal{const} (d(\gamma_{U,t}(\cdot)\gamma_{U,s}(t)))\,(X_t) \\ &= (d\gamma_{U,s}(\cdot))\,(X_t) \xlongequal{def} X_t\gamma_{U,s} \xlongequal{def} (X\gamma_{U,s})(t).\end{aligned}$$

局部系统的概念在定义微分流形的上同调, 即 de Rham 上同调时, 可以将传统的 de Rham 上同调推广到一般系数版本.

[1] Van Est 原文的模糊定义如此, 笔者认为此处应为修改为 $d\gamma_{U,s}(Y) \in \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$

3.1.2 de Rham 上同调

在本小节中, M 定义为光滑流形, V 为有限维非零实线性空间, 映射均为光滑 $M \to V$ 映射. 一个 n 次外形式 ω 是 M 上向量场 $X_1, \dots, X_n$ 的 n 元线性交错型, 每个 $\omega(X_1, \dots, X_n)$ 是 $M \to V$ 的映射, 其在 s 处的值记为 $\omega(X_1, \dots, X_n, s)$.

我们定义两个算子 $\bar{d}_0, \delta_0$ 将 n 次外形式变为 $n+1$ 次外形式 $\bar{d}_0\omega$, $\delta_0\omega$, 其定义分别为:

$$
\begin{aligned}
\bar{d}_0\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i X_i \omega(X_1, \overset{\hat{}}{\dots}, X_{n+1}), \\
\delta_0\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \overset{\hat{}}{\dots}, X_{n+1}).
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

再令 $d_0 = \bar{d}_0 + \delta_0$, 如 [6] 中计算可得:

$$d_0 d_0 = 0.$$

因此可得一链复形, 以及其上同调. 若给定一 M 上的局部系统 (V, π), 以及给定 s 的邻域 U, 考虑外导数:

$$d\omega = \gamma_{U,s} d_0(\gamma_{U,s}^{-1}\omega),$$

其可以展开化简为:

$$
\begin{aligned}
d\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) &= d_0\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) \\
&\quad + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \pi(X_i) \omega(X_1, \overset{\hat{}}{\dots}, X_{n+1}).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

由 $d_0 d_0 = 0$ 及定义, 易得 $d\,d = 0$, 补充记号:

$$d_1\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \pi(X_i) \omega(X_1, \overset{\hat{}}{\dots}, X_{n+1})$$

则有 $d = d_0 + d_1$.

当一个外形式 ω 满足对任意 s:

$$X_{1s} \implies \omega(X_1, \dots, X_n, s) = 0,$$

外形式称为**外微分形式**. 可以证明:

命题 3.1.1. *如果 ω, 则 $d\omega$ 仍为外微分形式.*

此时, 我们便可以考虑所有外微分形式的复形与同调群. 设 D_n 是 M 上所有 n 次外微分形式, 则 $dD_n \subseteq D_{n+1}$. 若 $d\omega = 0$, 则 ω 称为闭形式, 其全体记为 Z_n; 若 $\omega = d\omega'$, 则 ω 称为恰当形式, 其全体记为 B_n. $H^n = H(D_n)$ 定义为外微分形式的上同调群, 即 $H(D_n) = Z_n/B_n$.

在 $d = d_0$ 时, 此上同调即为 **de Rham 上同调**, d 的一般情况称为具有局部系数的 **de Rham** 上同调.

例 3.1.1. *我们求所有 0 次闭形式. 根据定义, 0 次微分形式为所有的光滑函数 $f : M \to V$. 若 f 为闭形式, 则有对任意 (U, s), 有 $\gamma_{U,s} d_0 \gamma_{U,s}^{-1} f = 0$. 因此可得 $\gamma_{U,s}^{-1} f = v$ 为常向量, 即有 $f(t) = \gamma_{U,s}(t)v = \pi(\alpha_{ts})v$. 如要求在全域上良定义, 则需要求 $\pi(\cdot)$ 在基本群上都是平凡的.*

在连通李群 G 上考虑时, 假设 $\mathfrak{g}$ 是李群的李代数, 取为右不变向量场. 再取 G 的一个表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}(G)$, 此时定义 $\pi(\alpha_{ts}) = \rho(ts^{-1})$, 其只涉及道路的起点与终点, 此时对 $X \in \mathfrak{g}$ 有:

$$\pi(X)(t) = X_t \gamma_{U,t} = X_t(\rho(\cdot)\rho(t^{-1})) = X_e r_t(\rho(\cdot)\rho(t^{-1})) = X_e(\rho(\cdot)) \in \mathrm{End}(V).$$

与 t 无关, 记 $X_e\rho$ 为 $\pi(X)$, 则有:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{n+1}) = &\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i X_i \omega(X_1, \overset{\hat{}}{\ldots}, X_{n+1}) \\ &+ \frac{1}{n+1}\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \overset{\hat{}}{\ldots}, X_{n+1}) \\ &+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\pi(X_i)\,\omega(X_1, \overset{\hat{}}{\ldots}, X_{n+1}) \end{aligned}$$

其中 ω 是 n 次微分形式, $X_1, \ldots, X_{n+1} \in \mathfrak{g}$.

3.1.3 Chevalley-Eilenberg 上同调

Chevalley-Eilenberg 上同调刻画的是一个李代数的上同调. 从上小节最后的表达式可以看出, 如果想要得到李代数结构而与李群无关的结构, $\omega(X_1, \ldots, X_n)$ 应该为常数, 这实际上是将微分形式限制在 Maurer-Cartan 形式上, 同时这些形式也为流形上的右不变形式.

注意我们的上同调在上边缘算子相差乘积的情况下是不变的, 因此我们将此结构抽象出来, 定义李代数的 Chevalley-Eilenberg 上同调.

设 $\mathfrak{g}$ 为有限维实李代数, 且有一表示 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, 即 $\mathfrak{g}$ 在 V 上有一左作用. Chevalley-Eilenberg 复形定义为 $\mathrm{Hom}_k(\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}, V)$, n 阶上闭链群为所有的交错 n 线性函数 $f : \bigwedge^n \mathfrak{g} \to V$. 记 $\mathfrak{g}^*$ 为李代数的对偶空间, 则 Chevalley-Eilenberg 复形同构于 $V \otimes \bigwedge^\bullet \mathfrak{g}^*$.

设 f 为 n 阶上闭链, $X_1, \ldots, X_{n+1} \in \mathfrak{g}$, 上边缘算子定义为:

$$\begin{aligned}(d\,f)(X_1, \ldots, X_{n+1}) = &\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i f(X_1, \overset{\hat{i}}{\ldots}, X_{n+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], X_1, \overset{\hat{i}\hat{j}}{\ldots}, X_{n+1}).\end{aligned}$$

我们通过另一种方式得到此公式. 其中对偶空间的外代数的定义详情可见 [7] P25-30. 设在有限维线性空间 V_0 上, f 为 k 线性函数, g 为 l 线性函数, 定义其张量积 $f \otimes g$ 为:

$$(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = f(v_1, \ldots, v_k) g(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}).$$

若进一步地, f, g 为交错线性函数, 定义其外积为:

$$f \wedge g = \frac{1}{k!l!} \mathrm{Alt}(f \otimes g),$$

或更直观地:

$$(f \wedge g)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn} \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

则归纳地可证明, 对任意的 $\alpha^1, \ldots, \alpha_k \in V_0'$, $v_1, \ldots, v_k \in V_0$, 有:

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \ldots \alpha^k(v_{\sigma(k)}) = \det[\alpha^i(v_j)]. \tag{3.3}$$

其次, 我们说明, $\mathfrak{g}$ 上的李括号对应着一个 $\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}^*$ 上的复形. 首先我们假设 $[\,,\,]$ 是 $\mathfrak{g}$ 作为线性空间上的一个反对称双线性算子, 即 $[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, 则其有对偶映射 $d_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ 假设 $\mathfrak{g}$ 的一组基底为 $X_1, \ldots, X_n$, 其对偶空间的基底为 $\omega_1, \ldots, \omega_n$. 取此括号的结构常数:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ijk} X_k.$$

则由条件, $C_{ijk} = -C_{jik}$. 此时考虑其对偶映射的结构常数, 设:

$$d_{\mathfrak{g}}\omega_s = \sum_{i<j} d_{sij}\omega_i \wedge \omega_j.$$

则由定义, 有

$$d_{\mathfrak{g}}\omega_s(X_i, X_j) = -\omega_s([X_i, X_j]) = -\omega_s(\sum_{k=1}^{n} c_{ijk}X_k) = -c_{ijs}.$$

联合可得:

$$d_{sij} = -c_{ijs}, \quad d_{\mathfrak{g}}\omega_s = \sum_{i<j} -c_{ijs}\omega_i \wedge \omega_j.$$

下面我们考虑 $\bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d_{\mathfrak{g}}} \bigwedge^3 \mathfrak{g}^*$, 其由 Leibniz 法则定义为:

$$d_{\mathfrak{g}}(\omega' \wedge \omega'') = (d_{\mathfrak{g}}\omega') \wedge \omega'' - \omega' \wedge (d_{\mathfrak{g}}\omega'').$$

考虑 $d_{\mathfrak{g}}^2\omega_s$, 计算有:

$$\begin{aligned}
d_{\mathfrak{g}}^2\omega_s &= d_{\mathfrak{g}}\left(\sum_{i<j} -c_{ijs}\,\omega_i \wedge \omega_j\right) = \sum_{i<j} -c_{ijs}\left(d_{\mathfrak{g}}\omega_i \wedge \omega_j - \omega_i \wedge d_{\mathfrak{g}}\omega_j\right) \\
&= \sum_{i<j} -c_{ijs}\left(\sum_{k<l}\left(-c_{kli}\,\omega_k \wedge \omega_l \wedge \omega_j\right) - \sum_{k<l}\left(-c_{klj}\,\omega_i \wedge \omega_k \wedge \omega_l\right)\right) \\
&= \sum_{i<j}\sum_{k<l} c_{ijs}\left(c_{kli}\,\omega_k \wedge \omega_l \wedge \omega_j - c_{klj}\omega_k \wedge \omega_l \wedge \omega_i\right).
\end{aligned}$$

观察到求和号中将严格不等号加上相等, 并不影响结果, 将其作用在 $X_\alpha \wedge X_\beta \wedge X_\gamma$, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, 得:

$$
\begin{aligned}
d_{\mathfrak{g}}^2\omega_s(X_\alpha\wedge X_\beta\wedge X_\gamma) &= \left(\sum_{i=1}^{\gamma} c_{i\gamma s}c_{\alpha\beta i} + \sum_{i=1}^{\beta} -c_{i\beta s}c_{\alpha\gamma i} + \sum_{i=1}^{\alpha} c_{i\alpha s}c_{\beta\gamma i}\right) \\
&\quad - \left(\sum_{j=\gamma}^{n} c_{\gamma js}c_{\alpha\beta j} + \sum_{j=\beta}^{n} -c_{\beta js}c_{\alpha\gamma j} + \sum_{j=\alpha}^{n} c_{\alpha js}c_{\beta\gamma j}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\gamma} c_{i\gamma s}c_{\alpha\beta i} + \sum_{i=1}^{\beta} -c_{i\beta s}c_{\alpha\gamma i} + \sum_{i=1}^{\alpha} c_{i\alpha s}c_{\beta\gamma i}\right) \\
&\quad + \left(\sum_{j=\gamma}^{n} c_{j\gamma s}c_{\alpha\beta j} + \sum_{j=\beta}^{n} -c_{j\beta s}c_{\alpha\gamma j} + \sum_{j=\alpha}^{n} c_{j\alpha s}c_{\beta\gamma j}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i\gamma s}c_{\alpha\beta i} - \sum_{i=1}^{n} c_{i\beta s}c_{\alpha\gamma i} + \sum_{i=1}^{n} c_{i\alpha s}c_{\beta\gamma i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(c_{i\gamma s}c_{\alpha\beta i} - c_{i\beta s}c_{\alpha\gamma i} + c_{i\alpha s}c_{\beta\gamma i}).
\end{aligned}
$$

将其记为 $C_{s,(\alpha,\beta,\gamma)}$, 即有:

$$
\begin{aligned}
d_{\mathfrak{g}}^2\,\omega_s &= \sum_{\alpha<\beta<\gamma} C_{s,(\alpha,\beta,\gamma)}\,\omega_\alpha\wedge\omega_\beta\wedge\omega_\gamma, \\
C_{s,(\alpha,\beta,\gamma)} &= \sum_{i=1}^{n}(c_{\alpha\beta i}c_{i\gamma s} - c_{\alpha\gamma i}c_{i\beta s} + c_{\beta\gamma i}c_{i\alpha s}), \\
c_{ijk} &= -c_{jik}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

观察可得:

$d_{\mathfrak{g}}^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C_{s,(\alpha,\beta,\gamma)} = 0,\ \forall s,\alpha,\beta,\gamma \quad \Longleftrightarrow \quad [\,,\,]$满足 Jocobi 恒等式, 为 Lie 括号.

给定一个李代数的表示 $\rho:\mathfrak{g}\to \mathrm{End}(V)$, 根据 Hom 与张量的关系有:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathrm{End}(V)) &\cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}(V,V)) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}\otimes V,V) \\
&\cong \mathrm{Hom}(V,\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},V)) \cong \mathrm{Hom}(V,\mathfrak{g}^*\otimes V).
\end{aligned}
$$

则 ρ 给出了对应的 $d_\rho: V\to\mathfrak{g}^*\otimes V$, 其表达式由

$$
d_\rho(v) = \sum_i X_i^*\otimes\rho(X_i)(v)
$$

确定. 同样地, 使用 Leibniz 法则可以将其扩展到 $d:\mathfrak{g}^*\otimes V\to\bigwedge^2\mathfrak{g}^*\otimes V$, 其定义为:

$$d(\omega\otimes v)=d'_\rho\omega\otimes v-\omega\wedge d_\rho v.$$

若假设 d'_ρ 的结构常数由

$$d'_\rho(\omega_i)=\sum_{\alpha<\beta}-c'_{\alpha\beta i}\omega_\alpha\wedge\omega_\beta$$

定义, 简单计算可知:

$$\begin{aligned}
&(d\circ d_\rho)(v)(X_\alpha\wedge X_\beta)\\
&=\sum_{i=1}^n(d'_\rho(\omega_i)\otimes\rho(X_i)(v))(X_\alpha\wedge X_\beta)+\rho([X_\alpha,X_\beta])(v)\\
&=\sum_{i=1}^n\left((\sum_{\alpha'<\beta'}-c'_{\alpha'\beta' i}\omega_{\alpha'}\wedge\omega_{\beta'})\otimes\rho(X_i)(v)\right)(X_\alpha\wedge X_\beta)+\rho([X_\alpha,X_\beta])(v)\\
&=\sum_{i=1}^n\left(-c'_{\alpha\beta i}\otimes\rho(X_i)(v)\right)+\rho([X_\alpha,X_\beta])(v)\\
&=\rho\left(\sum_{i=1}^n(c_{\alpha\beta i}-c'_{\alpha\beta i})X_i\right)(v).
\end{aligned}$$

因此当 $d'_\rho=d_\mathfrak{g}$ 时, 必然有 $d\circ d_\rho=0$, 此时我们得到李代数的 Chevalley-Eilenberg 上同调, 总结由如下资料导出:

$$\begin{aligned}
d:\textstyle\bigwedge^\bullet\mathfrak{g}^*\otimes V&\longrightarrow\textstyle\bigwedge^{\bullet+1}\mathfrak{g}^*\otimes V,\\
d(\omega\otimes v)&=d_\mathfrak{g}\,\omega+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge d_\rho\, v.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

3.1.4 李群的群上同调

我们这里定义李群作为群的上同调. 设 G 为群, G^n 为 G 的笛卡尔积. V 为有限维线性空间, $\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$ 为群表示. 则 $n\geq 0$ 维闭链群 $C^n(G,V)$ 定义为所有 G^n 到 V 的函数构成的 Abel 群, 其中 G^0 视为单位元 e_G. 上边缘算子 $d^{n+1}:C^n(G,V)\to C^{n+1}(G,V)$ 定义为:

$$\begin{aligned}
(d^{n+1}f)(g_1,\dots,g_{n+1})=\rho(g_1)f(g_2,\dots,g_{n+1})+(-1)^{n+1}f(g_1,\dots,g_n)\\
+\sum_{i=1}^n(-1)^if(g_1,\dots,g_{i-1},g_ig_{i+1},\dots,g_{n+1}).
\end{aligned}\tag{3.6}$$

则类似的, 此时有 $d^{n+1}\circ d^n=0$, 并定义群的上同调群 $H^n(G,V)=Z^n(G,V)/B^n(G,V)$.

3.2 二阶上同调与扩张

我们在此证明, 李群与李代数的二阶上同调与其扩张具有一一对应. 我们先给出群上的证明.

定义 3.2.1. *设 V 为 Abel 群, G 为任意群, 称群 E 为群 G 关于 V 的群扩张, 如果存在群的正合列*

$$1 \to V \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1.$$

引理 3.2.1. *一个群 G 关于 V 的群扩张 E 定义了 V 上的一个 $G-$ 作用, 即 $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$.*

证明 对于任意的 $g \in G$, 取 $e_g \in \pi^{-1}(g) \subseteq E$. 这个映射为 π 的一个截面. 对于任意的 $a \in V$, 共轭作用 $e_g i(a) e_g^{-1} \in i(V)$, 因此确定了 $\rho(g)(a) \in V$. 若取不同原像, 则存在 a' 使得 $e_g' = e_g i(a')$, 则:

$$e_g' i(a) e_g'^{-1} = e_g i(a') i(a) i(a'^{-1}) e_g^{-1} = e_g i(a' a a'^{-1}) e_g^{-1} = e_g i(a) e_g^{-1}.$$

则此作用良定义. □

定义 3.2.2. *我们说两个扩张是同构的, 如果其正合列:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 1 \\
1 \arrow[r] & V' \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "\pi'"] & G' \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

是同构的, 即其中 α, β, γ 均为同构; 如果此时 $\alpha = \mathrm{Id}_V$, $\gamma = \mathrm{Id}_G$, 我们称两扩张是等价的.

命题 3.2.2. *等价的扩张导出了 G 到 V 上同样的作用.*

引理 3.2.3. *二阶闭链的刻画: $f \in Z^2(G, V)$, 则有 $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$,*

$$df(g_1, g_2, g_3) = g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2) = 0.$$

二阶上边缘的刻画: 若 $\phi \in C^1(G, V)$, 则:

$$d\phi(g_1, g_2) = g_1 \phi(g_2) - \phi(g_1 g_2) + \phi(g_1).$$

我们考虑 π 的截面 σ:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & V \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "\pi"] & G \arrow[l, bend left, "\sigma"] \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

定义**商子**: $[g,h]=\sigma(g)\sigma(h)(\sigma(gh))^{-1}$. 易见 $[\,]: G\times G\to V$, 其结构仅依赖于 E 与 σ. 此时由 E 中乘法, 定义:

$$
\begin{aligned}
(a,g)\cdot(b,h) &= i(a)\sigma(g)i(b)\sigma(h) \\
&= i(a)\sigma(g)i(b)\sigma(g)^{-1}\sigma(g)\sigma(h)(\sigma(gh))^{-1}(\sigma(gh)) \\
&= (a+g\cdot b+[g,h],gh).
\end{aligned}
$$

由 E 中的结合律, 仅考虑 G 中分量, 则有:

$$
\begin{aligned}
(0,f)\cdot((0,g)\cdot(0,h)) &= (f[g,h]+[f,gh],fgh), \\
((0,f)\cdot(0,g))\cdot(0,h) &= ([f,g]+[fg,h],fgh).
\end{aligned}
$$

可见 $[\,]\in H^2(G,V)$, 由于 $[e_G,\sim]=\sigma(e_G)\in V$, $d\phi(e_G,g_2)=\phi(e_G)$, 我们可以在边缘的意义下修正, 使得 $\sigma(e_G)=e_E$.

引理 3.2.4. *给定群扩张 $1\to V\to E\xrightarrow{\pi}G\to 1$, 以及两个截面 σ,σ', 其分别导出商子 $[\,]$, $[\,]'$. 则两个商子之间相差一个二阶边缘.*

证明 由于 σ,σ' 均为截面, 则存在一个 $G\to V$ 的映射, 使得 $\sigma'(g)=\alpha(g)\sigma(g)$. 则

$$
\begin{aligned}
[g,h]'=\sigma'(g)\sigma'(h)(\sigma'(gh))^{-1} &= \alpha(g)\sigma(g)\alpha(h)\sigma(h)\sigma(gh)^{-1}\alpha(gh)^{-1} \\
&= \alpha(g)+\sigma(g)\alpha(h)\sigma(g)^{-1}+\sigma(g)\sigma(h)\sigma(gh)^{-1}-\alpha(gh) \\
&= [g,h]+\alpha(g)-\alpha(gh)+g\cdot\alpha(h).
\end{aligned}
$$

即 $[g,h]'-[g,h]=d\alpha(g,h)$, 则 $[\,]$ 与 $[\,]'$ 导出的同调类相同, 此时可知, 给定一个扩张相当于给定一个二阶同调类. □

引理 3.2.5. *设 E,E' 是等价的群扩张, $[\,]$ 为 E 扩张上 σ 导出的商子, 则存在 E' 扩张上的一个截面 σ', 其导出的商子恰好为 $[\,]$.*

证明 假设等价由 $E\xrightarrow{\beta}E'$ 给出. 则取 $\sigma'=\beta\sigma$, 由定义可知

$$
\begin{aligned}
\sigma'(g)\sigma'(h)\sigma'(gh)^{-1} &= (\beta\sigma(g))(\beta\sigma(h))(\beta\sigma(gh))^{-1} \\
&= (\beta\sigma(g))(\beta\sigma(h))(\beta\sigma(gh)^{-1}) \\
&= \beta(i([g,h])).
\end{aligned}
$$

则 $[g,h]' = i'^{-1}\beta(i([g,h])) = [g,h]$. 据此可知, 等价的群扩张上的商子的集合是相同的. □

由上面两则引理可知, 群扩张的等价类到群的二阶上同调群之间存在一个良定义的映射. 下面我们处理相反方向.

引理 3.2.6. *同一个商子 $[\,]$ 导出的群扩张总是等价的.*

证明 设 E 是由商子 $[\,] : G \times G \to V$ 给出的群扩张, 则作为集合有 $E = V \times G$. 其上的群乘法可由 $(a,g)\cdot(b,h) = (a+\rho(g)(b)+[g,h], gh)$ 给定. 因此若另一扩张 E' 由 $[\,]$ 给出, 则必然有 $E \cong E' \cong V \rtimes_{[\,]} G$. □

引理 3.2.7. *若两个商子 $[\,], [\,]'$ 导出同一个二阶上同调群的同调类, 则其分别导出的群扩张是等价的.*

证明 设商子 $[\,], [\,]'$ 分别导出群扩张 E, E', 且分别由 σ, σ' 导出[2], 两商子导出相同的同调类意味着存在映射 $\alpha : G \to V$, 使得 $[g,h] - [g,h]' = d\alpha(g,h) = g\alpha(h) - \alpha(gh) + \alpha(g)$. 设 $\mu(g) = \alpha(g)^{-1}\sigma'(g)$ 也为 E' 的截面, 其商子为 $[\,]''$ 则有:

$$\begin{aligned}
[g,h]'' &= \alpha(g)^{-1}\sigma'(g)\alpha(h)^{-1}\sigma'(h)\sigma'(gh)^{gh}\alpha(gh)\\
&= -\alpha(g) - \sigma'(g)\alpha(h)\alpha'(g)^{-1} + \sigma'(g)\sigma'(h)\sigma'(gh)^{-1} + \alpha(gh)\\
&= [g,h]' - \alpha(g) + g(gh) - g\alpha(h)\\
&= [g,h].
\end{aligned}$$

由于 $[\,]$ 为 E 的某个截面导出的商子, $[\,]''$ 为 E' 的某个截面导出的商子, 由上一引理的结论可知 E, E' 为等价的群扩张. □

定理 3.2.8. *给定 V, G, 则群扩张的等价类和上同调群 $H^2(G,V)$ 有一一对应.*

关于李代数的情况是完全类似的, 我们在此不予赘述, 只需注意此时李代数的扩张定义为短正合列:

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0.$$

其中 $\mathfrak{h}$ 为 Abel 李代数.

[2]因为商子可以直接生成群扩张, 集合上 $E \cong V \rtimes_{[\,]} G$, 可直接找到相对应截面.

3.3 Van Est 双复形

如前文所述, 对于李代数的上同调有:

$$\begin{aligned} df(X_1,\dots,X_{n+1}) &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}X_i f(X_1,\overset{\wedge}{\dots},X_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{i<j}(-1)^{i+j}f([X_i,X_j],X_1,\overset{\wedge}{\dots},X_{n+1}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

对于李群的上同调, 有:

$$\begin{aligned} \delta f(a_1,\dots,a_{n+1}) = a_1 f(a_2,\dots,a_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(a_1,\dots,a_i a_{i+1},\dots,a_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1}f(a_1,\dots,a_n). \end{aligned} \tag{3.8}$$

并记:

$$\begin{aligned} \delta^0 f(a_1,\dots,a_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(a_1,\dots,a_i a_{i+1},\dots,a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1}f(a_1,\dots,a_n). \end{aligned} \tag{3.9}$$

对于 de Rham 上同调, 有:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\dots,X_{n+1}) &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i X_i\omega(X_1,\overset{\wedge}{\dots},X_{n+1}) \\ &+ \frac{1}{n+1}\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\overset{\wedge}{\dots},X_{n+1}) \\ &+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\pi(X_i)\,\omega(X_1,\overset{\wedge}{\dots},X_{n+1}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

设 $\mathfrak{g}_1,\dots,\mathfrak{g}_r$ 为 r 个李代数 $\mathfrak{g}$, $G_1,\dots,G_s$ 为 s 个李群 G. 我们定义 $r,s-$ 上链为函数 $f:(\mathfrak{g}_1,\dots,\mathfrak{g}_r,G_1,\dots,G_s)\to V$, 其关于李代数部分是 r 交错线性的, 关于李群部分为光滑的. 定义 ${}^rF^s$ 为所有的 r–s 上链, $0,0$ 上链为 V 中元素. 再定义:

$$\begin{aligned} {}^rF = \sum_{s}^{r}F^s, &\qquad F^s = \sum_{r}^{r}F^s, \quad F = \sum^{r}F^s, \\ {}^rA = \sum_{i\geq r}^{i}F, &\qquad A^r = \sum_{i\geq r}F^i, \quad {}^rA^s = \sum_{i\geq r,j\geq s}^{i}F^j. \end{aligned}$$

此时有 ${}^0F$ 为群上同调的上链群 C, F^0 为代数上同调的上链群 K, F^1 为李群外微分形式上同调的上链群 D. 我们定义此双复形中的边缘算子. 设上边缘算子两方向由 d', δ' 给出, 对于 r 方向, 在 F^0 上, 令 d' 为李代数上同调中 d. 如果 f 是 r–s 上链, $s \geq 1$. 定义:

$$f_{a_2,\ldots,a_s}(X_1,\ldots,X_r,a_1) = f(X_1,\ldots,X_r,a_1,\ldots,a_s). \tag{3.11}$$

定义 $d'f \in {}^{r+1}F^s$ 为:

$$d'f(X_1,\ldots,X_{r+1},a_1,\ldots,a_s) = df_{a_2,\ldots,a_s}(X_1,\ldots,X_{r+1},a_1). \tag{3.12}$$

其中 d 为李群外微分形式上同调边缘算子. 此时易知在 r 方向, $d'\,d' = 0$.

对于 s 方向, 在 ${}^0F$ 上, 定义 $\delta' = \delta$ 为李群上同调的边缘算子. 在 r–s 上链群处, 设 $f \in {}^rF^s$, ≥ 1, 定义:

$$f_{X_1,\ldots,X_r}(a_1,\ldots,a_s) = f(X_1,\ldots,X_r,a_1,\ldots,a_s), \tag{3.13}$$

和

$$\delta' f(X_1,\ldots,X_r,a_1,\ldots,a_{s+1}) = \delta^0 f_{X_1,\ldots,X_r}(a_1,\ldots,a_{s+1}). \tag{3.14}$$

此时有 $\delta'\,\delta' = 0$. 且容易验证 $d'\delta' f = \delta' d' f$. 此时 F 构成双复形, 定义双复形的边缘算子为 $\Delta f = d'f + (-1)^r \delta' f$, $f \in {}^rF^s$. 则由双复形的一般理论知 $\Delta\,\Delta = 0$.

3.4 Van Est 映射

3.4.1 投影同构与逆映射

由于我们考虑的李群与李代数是有限维的, 设 $n = \dim G = \dim \mathfrak{g}$, 则由定义易知 ${}^rA = 0, r \geq n+1$. 而由 δ^0 的正合性知 $H({}^rF) = 0, r \geq 1$. 上链群的短正合序列导出了上同调的长正合序列:

$$\cdots \to H^k({}^{m+1}A) \to H^k({}^mA) \to H^k({}^mF) \xrightarrow{c} H^{k+1}({}^{m+1}A) \to \ldots$$

由上述条件可知 $H({}^mA) = 0$, 变换 m 标重复以上长正合序列, 归纳可得 $H({}^mA) = \cdots = H({}^1A) = 0$, 则在最后一长正合序列中:

$$\cdots \to H^k({}^1A) \to H^k({}^0A) \to H^k({}^0F) \xrightarrow{c} H^{k+1}({}^1A) \to \ldots$$

我们有:

定理 3.4.1. 投影映射 ${}_0\sigma : F \to {}^0F = C$ 作为复形间的同态, 导出了同调群的同构: $\phi : H(F) \to H(C)$.

我们现在定义 ${}_0\sigma$ 的同调逆, 即复形的同态 $\tau : C \to F$, 使得在同调群上, τ 导出投影映射的逆. 首先设 f 是群上同调的 n 阶上链, 定义:

$$f_{i;\, x_1, \hat{\dots}, x_n}(y) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n). \tag{3.15}$$

对于李群 G 上的切场 X, 我们定义其在 $(G_1, \dots, G_n)$ 上诱导的切场 $\partial_i(X)$ 为:

$$(\partial_i(X)f)(x_1, \dots, x_n) = (X f_{i;\, x_1, \hat{\dots}, x_n})(x_i). \tag{3.16}$$

则若 $X_1, \dots, X_k$ 为 G 上的切场, 有 $\partial_1(X_1), \dots, \partial_k(X_k)$ 是 $(G_1, \dots, G_n)$ 上可换的切场. 现设 $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{g}$, 我们定义 τf 的 r–$(n-r)$ 分量为:

$$\begin{aligned}
&({}_r\tau f)(X_1, \dots, X_r, a_1, \dots, a_{n-r}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_r)(\partial_1(X_{i_1}) \dots \partial_r(X_{i_r}) f)\,(e_G, \dots, e_G, a_1, \dots, a_{n-r}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_r)\partial_{(r)} f_{e_G, \dots, e_G, a_1, \dots, a_{n-r}}(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \\
&= \operatorname{Alt}_X \partial_{(r)} f_{e_G, \dots, e_G, a_1, \dots, a_{n-r}}(X_1, \dots, X_r).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 Alt_X 指对李代数部分求交错和:

$$\partial_{(r)} f_{e_G, \dots, e_G, a_1, \dots, a_{n-r}}(X_1, \dots, X_r) = (\partial_1(X_1) \dots \partial_r(X_r) f)(e_G, \dots, e_G, a_1, \dots, a_{n-r}).$$

此外, 补充定义:

$${}_r\tau f = 0, \quad 若\ r < 0\ 或\ r > n;$$

$${}_r\tau f = f, \quad 若\ r = 0.$$

将所有分量求直和, 得到分量间的**映射** $\tau : C \to F$:

$$\tau f = \sum_{-\infty}^{\infty} {}_r\tau f.$$

此时由 Van Est [8] 的证明, 在复形上, 有 $\tau\delta f = \Delta\tau f$, 记 $F^n_{tot} = \sum_r {}^rF^{n-r}$, 即有下图交换:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{\delta} & C^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \\ \cdots & \longrightarrow & F^n_{tot} & \xrightarrow{\Delta} & F^{n+1}_{tot} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

此时可知 τ 为复形间的同态, 由 ${}_0\sigma\,\tau = \mathrm{Id}_C$, 可知其给出了同调群的同构.

此时设 σ_0 为 F 到 $F^0 = K$ 的投影映射, 即只考虑 $F^0 \subset F$ 上的资料, 容易验证投影为复形间的同态, 则我们定义 $\tau_0 = \sigma_0\,\tau : C \to K$, 其将李群上同调的 n 阶上链映射到李代数上同调 n 阶上链. 我们称此映射为 **Van Est 映射**.

3.4.2 李上同调的长正合序列

我们考虑 Van Est 映射 $\tau_0 : C \to K$, 设此复形同态的核为 Z, 则有长正合序列

$$\cdots \to H^n(Z) \xrightarrow{\eta} H^n(C) \xrightarrow{\tau_0} H^n(K) \xrightarrow{c} H^{n+1}(Z) \to \ldots \tag{3.18}$$

考虑复形上的 Mayer-Vietoris 序列, 其结构与代数拓扑中相同. 设三元对为 $(\tau C + A^1, \tau C, A^1)$, 则有长正合序列:

$$\cdots \to H^n(\tau C \cap A^1) \xrightarrow{\psi} H^n(\tau C) \oplus H^n(A^1) \xrightarrow{\phi} H^n(\tau C + A^1) \xrightarrow{\tilde{\Delta}} H^{n+1}(\tau C \cap A^1) \to \ldots.$$

其中:

$$\psi u = (-\eta_1 u, \eta_2 u), \qquad u \in \tau C \cap A^1;$$
$$\phi(v_1, v_2) = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2, \qquad v_1 \in \tau C,\ v_2 \in A^1.$$

且 $\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2$ 均由自然内射导出. $\tilde{\delta}$ 为连结映射. 由于 $\xi_1 : H(\tau C) \to H(\tau C + A^1) = H(F)$ 为满射, 则有 ϕ 为满射. 则 $\ker \tilde{\Delta} = H(\tau C + A^1)$, 因此 $\tilde{\Delta} H(\tau C + A^1) = 0$, 进一步地知 ψ 为单射.

又因为 $\xi_1 : H(\tau C) \to H(\tau C + A^1)$ 为同构, 则可以找到 ϕ 的一个群同态的截面, 则可得中间部分的可裂性, 即:

$$H(\tau C) \oplus H(A^1) \cong H(\tau C) \oplus \psi H(\tau C \cap A^1).$$

此时将其投到 $H(A^1)$ 上便得到 $H(\tau C \cap A^1)$ 与 $H(A^1)$ 的同构.

注意到 $\tau_0 f = 0$ 当且仅当 $\tau f \in \tau C \cap A^1$, 有 $\tau Z = \tau C \cap A^1$. 而 τ 为 $H(F)$ 与 $H(C)$ 的同构, 有 $H(Z) \cong H(\tau Z)$. 因此 $H(Z) \cong H(\tau C \cap A^1) \cong H(A^1)$.

3.5 Van Est 定理

注意到 F^1 为 de Rham 链复形 D, F^r, $r>1$ 的上同调相当于固定其他群元时的 de Rham 上同调. 因此我们显然有:

引理 3.5.1. *若有 $H^1(D)=\cdots=H^k(D)=0$, 则当 $r=1,2,\dots,k$, 对任意 $s\geq 1$ 有 $H({}^rF^s)=0$.*

由此我们可以证明 Van Est 定理:

定理 3.5.2 (Van Est). *若 $H^1(D)=\cdots=H^k(D)=0$, 则有*

(i) *$H^0(Z)=H^1(Z)=\cdots=H^{k+1}(Z)=0$;*

(ii) *τ_0 在 $i=0,1,\dots,k$ 时导出 $H^i(C)\cong H^i(K)$, 以及 $k+1$ 时单射 $H^{k+1}(C)\to H^{k+1}(K)$.*

证明 考虑 A^1 的谱序列, 由假设及引理可知, 第一页时 $i+j\leq k+1$ 的分量均变为 0, 则此后这部分的指均为 0, 因此收敛到谱序列的极限时有 $H^0(A^1)=\cdots=H^{k+1}(A^1)=0$, 由上节结论有 $H(Z)\cong H(A^1)$ 恒成立, 立得结论 (i). 结论 (ii) 仅需要考虑长正合序列, 再由结论 (i) 立得. □

定义 3.5.1 (*k*–连通). *若 $H^1(D)=\cdots=H^k(D)=0$, 我们称李群为 k–连通的.*

我们现在证明, 任何一个有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 都可以积分成为一个李群.

定理 3.5.3. *任何一个有限维李代数 $\mathfrak{g}$, 都存在一个李群 G, 使得 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数.*

证明 设李代数 $\mathfrak{g}$ 的维数为 n. 则存在其伴随表示的正合列:

$$0\longrightarrow \ker\mathrm{ad}\xrightarrow{i}\mathfrak{g}\xrightarrow{\mathrm{ad}}\mathrm{ad}(\mathfrak{g})\longrightarrow 0.$$

其中 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})\subset\mathrm{End}(\mathfrak{g})$. 由于我们熟知的结论, $\mathrm{End}(\mathfrak{g})=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 为李群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的李代数. 则由子代数与连通李子群的对应, 我们有 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的连通李子群 G_0, 其李代数为 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. 而根据李群泛覆叠空间的理论, $G'=\tilde{G}_0$ 是单连通李群, 且其李代数为 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. 根据李群的理论, 李群的基本群为 0 导出 $H^2_{dR}(G')=0$, 即 G 是 2–连通的. 则由 Van Est 定理, G' 的二阶上同调群和 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 的二阶上同调群同构. 记 $V=\ker\mathrm{ad}$, 则由二阶上同调群与扩张的关系可知, 存在一个群的扩张 G:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & V \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "Lie"] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "Lie"] & G' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "Lie"] & 1 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r, "i'"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi'"] & \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

此时可以验证 $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数. □

3.6 另一视角下的 Van Est 定理

在这一节中, 我们将简单地从另一视角观察 Van Est 双复形, 引出更一般的构造上同调的方法, 并由此提供其结构更加直观的解释.

3.6.1 范畴的神经

对于任意一个范畴 $\mathcal{C}$, 我们引入其神经 (Nerve) 的概念, 在定义范畴时, 我们有一对映射 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. 将其扩展到更多的态射, 便有:

定义 3.6.1. *对于任意一个范畴 $\mathcal{C}$, 其神经为如下图:*

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \;\underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}}\; \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \;\substack{\xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2}}\; (\mathrm{Mor}(\mathcal{C}))^{[2]} \;\substack{\xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \\ \xleftarrow{d_3}}\; (\mathrm{Mor}(\mathcal{C}))^{[3]} \;\substack{\xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \\ \xleftarrow{d_3} \\ \xleftarrow{d_4}}\; \cdots\cdots$$

其中 $(\mathrm{Mor}(\mathcal{C}))^{[k]}$ 为全体 $(g_0, \ldots, g_{k-1})$, $g_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 满足 $s(g_i) = t(g_{i+1})$, 即前后可复合的 k 元态射对. 其中映射定义如下:

$$d_0(g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}) = (g_1, \ldots, g_{k-1}).$$

$$d_i(g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}) = (g_0, \ldots, g_{i-1}g_i, \ldots, g_{k-1}), \quad i = 1, \ldots, k-1.$$

$$d_k(g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}) = (g_0, g_1, \ldots, g_{k-2}).$$

d_0 为去掉目标, d_k 为去掉来源, d_i 为中间映射复合.

若将空间取成自由 Abel 群, 则我们可以定义复形的边缘算子为 $d = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i d_i$. 此时有:

$$C_0 \xleftarrow{\;d\;} C_1 \xleftarrow{\;d\;} C_2 \xleftarrow{\;d\;} C_3 \xleftarrow{\;d\;} \cdots\cdots$$

此时取任一线性空间 V, 并作映射的线性对偶:

$$\mathrm{Map}(C_0, V) \xrightarrow{\;d^*\;} \mathrm{Map}(C_1, V) \xrightarrow{\;d^*\;} \mathrm{Map}(C_2, V) \xrightarrow{\;d^*\;} \mathrm{Map}(C_3, V) \xrightarrow{\;d^*\;} \ldots$$

则可得到一上同调, 并得到范畴的上同调群. 考虑范畴 **BG**, 此时其神经为:

$$* \;\underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}}\; G \;\substack{\xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2}}\; (G)^{[2]} \;\substack{\xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \\ \xleftarrow{d_3}}\; (G)^{[3]} \;\substack{\xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \\ \xleftarrow{d_3} \\ \xleftarrow{d_4}}\; \cdots\cdots$$

此时考虑其生成的上同调, 恰好与李群上同调结构吻合. 此时考虑范畴 **Pair(G)**, 其对

象为 G 中的元素, 态射集为 $\mathrm{Pair}(G) = G^2$, 态射及其复合由如下图给出:

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[loop left, "\mathrm{Id}=(g,g)"] & h \arrow[l, bend right, "(g,h)"'] & k \arrow[l, bend right, "(h,k)"'] \arrow[ll, bend left, "(g,k)"] \arrow[loop right, "\mathrm{Id}=(k,k)"]
\end{tikzcd}$$

注意若将 k–可复合的态射对写成如下形式, 记为 $(g_1, \dots, g_k)$, 则其导出的上同调与 δ^0 定义的上同调一致.

$$g_0 g_1 \cdots g_k \xleftarrow{g_0} g_1 \cdots g_k \xleftarrow{g_1} \cdots\cdots \xleftarrow{g_{k-2}} g_{k-1} g_k \xleftarrow{g_{k-1}} g_k$$

此时可知 Van Est 双复形的李群分量的上同调无非是 **BG** 范畴与 **Pair(G)** 范畴导出的上同调.

3.6.2 叶理上同调

叶理上同调 (Foliated cohomology) 具有许多不同的定义, 我们在此简述 Van Est 双复形所使用的上同调. 设 $pr : G^{p+1} \to G^p$ 为投影 $(g_1, \dots, g_{p+1}) \mapsto (g_2, \dots, g_{p+1})$, 则从上的映射 $d_{pr} : TG^{p+1} \to TG^p$, 则在纤维上有 $(X_1, \dots, X_{p+1}) \mapsto (X_2, \dots, X_{p+1})$, 这定义了一个子丛 $\mathcal{F} = \ker d_{pr} \cong G^{p+1} \times \mathfrak{g}$.

考虑 $\mathcal{F}$ 的对偶与外代数丛:

$$T^*\mathcal{F} \cong G^{p+1} \times \mathfrak{g}^*,$$
$$\bigwedge^k T^*\mathcal{F} \cong G^{p+1} \times \bigwedge^k \mathfrak{g}^*.$$

而由于这一子丛是仅考虑第一分量的, 则其上所作的 de Rham 上同调即为前文所定义的固定其他分量的 de Rham 上同调.

3.6.3 李双复形

在这两个观点下, 记 $\Omega^r(G^s) = \bigwedge^r \mathfrak{g}^* \times C(G^s, V)$, 则我们有如下双复形:

$$
\begin{tikzcd}
\bigwedge^{\dim \mathfrak{g}} \mathfrak{g}^* \arrow[r] & \Omega^{\dim \mathfrak{g}}(G) \arrow[r] & {} & & \\
\vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \\
\bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^2(G) \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^2(G^2) \arrow[r] \arrow[u] & {} & \\
\mathfrak{g}^* \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^1(G) \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^1(G^2) \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^1(G^3) \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u] & C(G) \arrow[r] \arrow[u] & C(G^2) \arrow[r] \arrow[u] & C(G^3) \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
 & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[u] & C(G) \arrow[r] \arrow[u] & C(G^2) \arrow[r] \arrow[u] & \dots
\end{tikzcd}
$$

多出来的列和行均为相关映射的核, 则使用两个不同方向的滤子的谱序列也可以得到 Van Est 定理的结论.

第 4 章 李 2 群与李 2 代数上的 Van Est 定理

在本章中, 我们简单地介绍李 2 群与李 2 代数, 并得到特殊情形下的李 2 群与李 2 代数下的 Van Est 定理. 这部分的工作主要跟随 [9][10], 本章中的计算量大的部分我们将略去证明过程. 由于本章中的结构对李 2 群及李 2 代数均有定义, 因此本章中以李 2 代数一词代指李 2 群和李 2 代数.

4.1 2 向量空间上的线性函子范畴

定义 4.1.1. *一个 2 向量空间指的是以下结构:*

$$V_1 \times_{V_0} V_1 \xrightarrow{m} V_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} V_0 \xrightarrow{u} V_1.$$

其中的空间均为线性空间, 出现的映射均为线性映射, 且 $su = tu = \mathrm{Id}$. V_1 可视为 V_0 作为范畴上的态射. $V_1 \times_{V_0} V_1 = \{(v_1, v_1') \mid s(v_1) = t(v_1'),\, v_1, v_1' \in V_1\}$, $u(v_0)$ 为 m 复合映射的单位元.

由线性空间的理论, 我们有 $V_1 \cong \ker s \oplus V_0$. 设同构 $\Phi : V_1 \to \ker s \oplus V_0$. 具体写出则有:

$$\Phi(v_1) = (v_1 - us(v_1), us(v_1)),$$
$$\Phi^{-1}((\omega, v)) = \omega + u(v).$$

记 $\hat{s} = s\Phi^{-1}$, $\hat{t} = t\Phi^{-1}$. 对于 $\omega \in \ker s$, $v \in V_0$, 计算可得有:

$$\hat{s}(\omega + v) = v,$$
$$\hat{t}(\omega + v) = v + t(\omega).$$

再由下图:

$$\begin{tikzcd}
v+t(\omega+\omega') & v+t(\omega) \arrow[l, bend right, "{(\omega',v+t(\omega))}"'] & v \arrow[l, bend right, "{(\omega,v)}"'] \arrow[ll, bend left, "{(\omega'+\omega',v)}"]
\end{tikzcd}$$

可知在 $\ker s \oplus V_0$ 中的映射乘积 $\hat{m}$, 有 $(\omega', v+t(\omega)) \circ (\omega, v) = (\omega'+\omega', v)$. 记 $W = \ker s$, 因此等价的 2 向量空间本质上由以下资料决定:

(i) 线性映射 $W \xrightarrow{\phi} V$,

(ii) $W \oplus V \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} V$, 使得 $s(w, v) = v$, $t(w, v) = v + \phi(w)$.

将 2 线性空间视为范畴, 考虑他到自身的线性函子 (F', f), 其中 f 作用在对象 V 上,

F 作用在态射 $W \oplus V$ 上. 则有:

$$v + \phi(w) \xleftarrow{(w,v)} v \quad \text{被映为} \quad f(v) + f(\phi(w)) \xleftarrow{F'(w,v)} f(v)$$

由于假设线性性质, $F'(w,v) = F'(w,0) + F'(0,v)$, 且 $(0,v) = \mathrm{Id}_v$, 有 $F'(0,v) = f(v)$. 记 $F(w) = F'(w,0)$, 此时有:

$$f(v) + f(\phi(w)) \xleftarrow{(Fw,fv)} f(v) \xrightarrow{(Fw,fv)} f(v) + \phi(F(w)).$$

我们有:

命题 4.1.1. *给定 2 向量空间范畴, 则其到自身的线性函子为所有的线性映射对 (F,f), $F: W \to W$, $f: V \to V$, 使得下图交换*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\phi"] & W \arrow[d, "\phi"] \\ V \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$

再考虑不同函子间的线性自然变换. 考虑线性自然变换 $\alpha : (F_1, f_1) \Rightarrow (F_2, f_2)$. 考虑自然变换所需的图表:

$$\begin{tikzcd} f_1(v) + f_1\phi(w) \arrow[d, "\alpha(v+\phi w)"] & f_1(v) \arrow[l, "(F_1 w, f_1 v)"'] \arrow[d, "\alpha(v)"] \\ f_2(v) + f_2\phi(w) & f_2(v) \arrow[l, "(F_2 w, f_2 v)"'] \end{tikzcd}$$

将 α 写为 (α_W, α_V), 则简单列举所需条件有:

$$
\begin{aligned}
\alpha_V &= f_1 \\
f_1 + \phi\alpha_W &= f_2 \\
F_1 + \alpha_W\phi &= F_2
\end{aligned}
$$

因此仅需多刻画 α_W, 为求简便, 此后将其直接记为 $\alpha : V \to W$.

此时再考虑线性自然变换的横合成:

$$
\begin{tikzcd}
* \arrow[r, bend left=50, "{(F_1,f_1)}"] \arrow[r, bend right=50, "{(G_1,g_1)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & * \arrow[r, bend left=50, "{(F_2,f_2)}"] \arrow[r, bend right=50, "{(G_2,g_2)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & *
\end{tikzcd}
\quad \text{横复合为} \quad
\begin{tikzcd}
* \arrow[rr, bend left=50, "{(F_2F_1,f_2f_1)}"] \arrow[rr, bend right=50, "{(G_2G_1,g_2g_1)}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\beta*\alpha"] & & *.
\end{tikzcd}
$$

则经计算有:

$$
\begin{aligned}
(\beta * \alpha(v), f_2f_1(v)) &= (G_2\alpha(v), g_2f_1(v)) \circ (\beta f_1(v), f_2f_1(v)) \\
&= (G_2\alpha(v) + \beta f_1(v), f_2f_1(v)).
\end{aligned}
$$

即有:

$$
\beta * \alpha = G_2\alpha + \beta f_1 = \beta\phi\alpha + F_2\alpha + \beta f_1.
$$

由于线性微分同构可仅由其来源 (F, f) 和 α 决定, 我们将每个线性自然变换记为 $(\alpha; F, f)$. 注意到此时有:

$$
\mathrm{LinNat} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathrm{LinFunct}.
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\alpha; F, f) \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "t"'] & (F, f). \\
& (F, f) + (\alpha\phi, \phi\alpha)
\end{tikzcd}
$$

则由前述 2 向量空间的理论, 记线性函子的空间为 $\mathrm{End}(\phi)$, 注意到 $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$, $\ker s \cong \mathrm{Hom}\,(V, W)$, 我们有 $\mathrm{LinNat} \cong \mathrm{Hom}\,(V, W) \oplus \mathrm{End}(\phi)$. 进一步还可以证明:

命题 4.1.2. $\mathrm{LinNat} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathrm{LinFunct}$ *是一个 2 线性空间.*

进一步地我们将证明, $\mathrm{LinNat} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathrm{End}(\phi)$ 在李代数的范畴中, 即其是一个李 2 代数. 记 $A = (\alpha; F, f)$, $B = (\beta; G, g)$. 则有:

$$
[A, B] = ([\alpha, \beta]_\phi + \mathcal{L}^{\phi}_{(F,f)}(\beta) - \mathcal{L}^{\phi}_{(G,g)}(\alpha), [F, G], [f, g]).
$$

其中

$$[\alpha,\beta]_\phi=\alpha\phi\beta-\beta\phi\alpha,\quad \mathcal{L}^{\phi}_{(F,f)}(\beta)=F\beta-\beta f,\quad \mathcal{L}^{\phi}_{(G,g)}(\alpha)=G\alpha-\alpha g.$$

其李代数结构将在下节中展现.

End(ϕ) 是一个李代数. 这是由于若 $\phi F_i=f_i\phi$, 此时有

$$\phi[F_1,F_2]=\phi(F_1F_2-F_2F_1)=(f_1f_2-f_2f_1)\phi=[f_1,f_2]\phi$$

即 $([F_1,F_2],[f_1,f_2])\in \mathrm{End}(\phi)$, 此外 s,t 是李代数同态也是容易验证的.

4.2 李 2 结构与交叉模

定义 4.2.1. *一个 2 群指的是以下结构:*

$$G_1\times_{G_0}G_1\xrightarrow{m}G_1\overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}}G_0\xrightarrow{u}G_1.$$

其中的结构均为群, 出现的映射均为群同态, 且 $su=tu=\mathrm{Id}$. G_1 可视为 G_0 作为范畴上的态射. $G_1\times_{G_0}G_1=\{(g_1,g_1')\mid s(g_1)=t(g_1'),\ g_1,g_1'\in G_1\}$, $u(g_0)$ 为 m 复合映射的单位元. 如果群均为李群, 映射均为李群同态, 此结构则称为李 2 群.

定义 4.2.2. *一个李 2 代数指的是以下结构:*

$$\mathfrak{g}_1\times_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{g}_1\xrightarrow{m}\mathfrak{g}_1\overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}}\mathfrak{g}_0\xrightarrow{u}\mathfrak{g}_1$$

其中的结构均为李代数, 出现的映射均为李代数同态, 且 $su=tu=\mathrm{Id}$. $\mathfrak{g}_1$ 可视为 $\mathfrak{g}_0$ 作为范畴上的态射. $\mathfrak{g}_1\times_{\mathfrak{g}_0}\mathfrak{g}_1=\{(x_1,x_1')\mid s(x_1)=t(x_1'),\ x_1,x_1'\in\mathfrak{g}_1\}$, $u(x_0)$ 为 m 复合映射的单位元.

对于李 2 代数考虑 $\mathfrak{h}=\ker s$, 则作为集合 $\Phi:\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{h}$. 则正如 2 线性空间中所讨论的, 对于 $y_i\in\mathfrak{h}$, $x_i\in\mathfrak{g}_0$, 李括号:

$$\begin{aligned}
&[(y_0,x_0),(y_1,x_1)]\\
&:=\Phi\left([\Phi^{-1}(y_0,x_0),\Phi^{-1}(y_1,x_1)]\right)\\
&=\Phi\left([y_0+u(x_0),y_1+u(x_1)]_1\right)\\
&=([y_0,y_1]_1+[u(x_0),y_1]_1-[u(x_1),y_0]_1+[u(x_0),u(x_1)]_1-u([x_0,x_1]_0),[x_0,x_1]_0)\\
&=([y_0,y_1]_1+[u(x_0),y_1]_1-[u(x_1),y_0]_1,[x_0,x_1]_0)\,.
\end{aligned}$$

则有 $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h} \oplus_L \mathfrak{g}_0$, 其中 $L : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{Der}(\mathfrak{h})$, $x \mapsto [u(x), -]$.

定义 4.2.3. *一个李代数上的交叉模指的是李代数的同态 $\mathfrak{h} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{g}$, 以及李代数表示 $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\mathfrak{h})$, 使得:*

(i) $\mu(L_x y) = [x, \mu(y)]$, $y \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$,

(ii) $L_{\mu(y_0)} y_1 = [y_0, y_1]$, $y_0, y_1 \in \mathfrak{h}$.

则有定理:

定理 4.2.1. *李代数的交叉模结构与李 2 代数结构一一对应.*

证明 我们仅从交叉模导出李 2 代数. 假设 $\mathfrak{h} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{g}$, 以及李代数表示 $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\mathfrak{h})$, 则考虑向量空间的直和 $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}$ 上的来源和目标以及李括号:

$$\mathfrak{h} \oplus_L \mathfrak{g} \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathfrak{g}, \quad s(y, x) = x, \quad t(y, x) = x + \mu(y).$$

$$[(y_0, x_0), (y_1, x_1)] = ([y_0, y_1] + L_{x_0} y_1 - L_{x_1} y_0, [x_0, x_1]), \quad (y_0, x_0), (y_1, x_1) \in \mathfrak{h} \oplus_L \mathfrak{g}.$$

则此时我们已然定义了一个李 2 代数. □

同样地, 我们考虑李群上的 2 结构与交叉模:

定义 4.2.4. *一个李群上的交叉模指的是李群的同态 $i : H \to G$, 以及李群的右表示 $\rho : G \to \mathrm{Aut}\,(H)$, $\quad g \mapsto (\cdot)^g$, 使得*

(i) $i(h^g) = g^{-1} i(h) g$,

(ii) $h_0^{i(h_1)} = h_1^{-1} h_0 h_1$.

则我们构造的李 2 群 $G_1 = H \rtimes_\rho G_0$, 此时仍有:

定理 4.2.2. *李群的交叉模结构与李 2 群结构一一对应.*

考虑任意李 2 群, 其结构为:

$$G_1 \times_{G_0} G_1 \xrightarrow{m} G_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} G_0 \xrightarrow{u} G_1.$$

则两端同时 Lie 代数化, 有:

$$\mathfrak{g}_1 \times_{\mathfrak{g}_0} \mathfrak{g}_1 \xrightarrow{dm} \mathfrak{g}_1 \underset{dt}{\overset{ds}{\rightrightarrows}} \mathfrak{g}_0 \xrightarrow{du} \mathfrak{g}_1.$$

这是一个李 2 代数.

下面我们考虑将任意一个李 2 代数积分为一个李代数, 首先处理 2 线性空间的线性函子, 线性自然变换 $\mathrm{LinNat} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathrm{End}(\phi)$ 我们已经证明其为李 2 代数, 观察到 $\mathfrak{gl}(\phi)_0 := \mathrm{End}(\phi)$ 中的元素 $(F, f) \in \mathfrak{gl}(W) \oplus \mathfrak{gl}(V)$ 为李子代数. 且有 $t(\alpha; 0, 0) = (\alpha\phi, \phi\alpha)$. 我们仅需要积分交叉模.

命题 4.2.3. *我们有 $\mathrm{GL}(\phi)_H \xrightarrow{\Delta} \mathrm{GL}(\phi)_0$ 是李 2 群的交错模, 其中:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(\phi)_H &= \left\{\alpha \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid I + \phi\alpha,\ I + \alpha\phi \text{ 均可逆}\right\}, \\
\mathrm{GL}(\phi)_0 &= \{(F, f) \in \mathrm{GL}(W) \times \mathrm{GL}(V) \mid \phi F = f\phi\}, \\
\Delta &: \mathrm{GL}(\phi)_H \to \mathrm{GL}(\phi)_0, \quad \alpha \mapsto (I + \phi\alpha,\ I + \alpha\phi), \\
\alpha^{(F,f)} &= F^{-1}\alpha f.
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{GL}(\phi)_H$ 中的群运算 $\alpha \odot \beta = \alpha + \beta + \alpha\phi\beta$. 导出的李 2 群的李 2 代数恰好为上述结构.

4.3 李 2 结构上的表示

我们先定义李 2 群上的表示, 我们在交叉模上考虑.

定义 4.3.1. *设李 2 代数给出交叉模 $\mathfrak{h} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{g}$, 则李 2 代数的一个表示为下述李代数同态的交换图:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathrm{Hom}(V, W) \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathfrak{g} \arrow[r, "\rho_0"'] & \mathfrak{gl}(\phi)_0
\end{tikzcd}$$

若将 ρ_0 写为分量形式 $\rho_0^0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, $\rho_0^1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$. 则对任意 $x \in \mathfrak{g}$ 应有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\rho_0^1(x)"] \arrow[d, "\phi"'] & W \arrow[d, "\phi"] \\
V \arrow[r, "\rho_0^0(x)"'] & V
\end{tikzcd}$$

$\rho_1 : \mathfrak{h} \to \mathrm{Hom}(V, W)$ 为李代数同态, 即对任意 $y_0, y_1 \in \mathfrak{h}$,

$$\rho_1([y_0, y_1]) = \rho_1(y_0)\phi\rho_1(y_1) - \rho_1(y_1)\phi\rho_1(y_0).$$

表示应该保两端的作用, 对任意 $y \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}$, 有:

$$\rho_1(L_x y) = L_{\rho_0(x)}\rho_1(y) = \rho_0^1(x)\rho_1(y) - \rho_1(y)\rho_0^0(x).$$

我们给出李 2 代数的伴随表示, 仍在交叉模上讨论, 则对于李 2 代数 $\mathfrak{h} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{g}$, 考虑如下表示:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{ad}_1"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}_0"'] & \mathfrak{gl}(\mu)_0
\end{tikzcd}$$

其中 $\mathrm{ad}_1(y) = -L_{(\cdot)}y$, $ad_0(x) = (L_x, \mathrm{ad}_x)$. 我们验证这确实是一个表示. 首先:

$$\mu L_x(y) = [x, \mu(y)] = \mathrm{ad}_x\mu(y),$$

由此可知 ad_0 是良定义的, 由于:

$$\begin{aligned}
&m([(u\mu y_0, y_0), (y_1, 0)]) = [m(u\mu y_0, y_0), m(y_1, 0)] = [y_0, y_1], \\
&m([(u\mu y_0, y_0), (y_1, 0)]) = m([u\mu y_0, y_1], [y_0, 0]) = m([u\mu y_0, y_1], 0) = [u\mu y_0, y_1],
\end{aligned}$$

可知 $[y_0, y_1] = [u\mu y_0, y_1]$.

$$\begin{aligned}
\Delta\,\mathrm{ad}_1(y) &= \Delta(-L_{(\cdot)}y) = ((-L_{(\cdot)}y)\mu, \mu(-L_{(\cdot)}y)) = (-[u\mu(\cdot), y], -[\mu u(\cdot), \mu(y)]) \\
&= ([y, \cdot], [\mu(y), \cdot]), \\
\mathrm{ad}_0\,\mu(y) &= (L_{\mu(y)}(\cdot), \mathrm{ad}_{\mu(y)}(\cdot)) = ([u\mu(y), \cdot], [\mu(y), \cdot]) = ([y, \cdot], [\mu(y), \cdot]).
\end{aligned}$$

由此可知图确为交换图. ad_0 为李代数同态较为简单, 对于 ad_1 验证同态:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_1([y_0, y_1])(x) &= -L_x([y_0, y_1]) = [ux, [y_1, y_0]]. \\
[\mathrm{ad}_1 y_0, \mathrm{ad}_1 y_1](x) &= [L(\cdot)y_0, L_{(\cdot)}y_1](x) \\
&= \left[(L_{(\cdot)}y_0)\mu(L_{(\cdot)}y_1) - (L_{(\cdot)}y_1)\mu(L_{(\cdot)}y_0)\right](x) \\
&= L_{(\cdot)}y_0[x, \mu y_1] - L_{(\cdot)}y_1[x, \mu y_0] \\
&= [[ux, u\mu y_1], y_0] - [[ux, u\mu y_0], y_1] = [[ux, y_1], y_0] - [[ux, y_0], y_1] \\
&= [ux, [y_1, y_0]] = \mathrm{ad}_1[y_0, y_1](x).
\end{aligned}$$

而关于作用有:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_1(L_{x_0}y)(x_1) &= -L_{(\cdot)}(L_{x_0}y)(x_1) = -L_{x_1}(L_{x_0}y)(x_1)\\ &= -[ux_1, L_{x_0}y] = -[ux_1,[ux_0,y]] = -[[y,ux_0],ux_1].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{\mathrm{ad}_0(x_0)}(\mathrm{ad}_1(y))(x_1) &= L_{(L_x,\mathrm{ad}_x)}(-L_{(\cdot)}y)(x_1)\\ &= (L_{x_0}(-L_{(\cdot)}y) + L_{(\cdot)}y\,\mathrm{ad}_{x_0})(x_1)\\ &= L_{x_0}(-L_{x_1}y) + L_{[x_0,x_1]}y\\ &= [ux_0, -[ux_1,y]] + [u[x_0,x_1],y] = [ux_0,-[x_1,y]] + [[ux_0,ux_1],y]\\ &= -[[y,ux_0],ux_1] = \mathrm{ad}_1(L_{x_0}y)(x_1).\end{aligned}$$

综上可知, 此表示确实为李 2 代数的 2–表示. 此时我们有:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\mathrm{ad}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & \mathrm{ad}_1(\mathfrak{h}) \arrow[r] \arrow[d] & 0\\
0 \arrow[r] & \ker\mathrm{ad}_0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & \mathrm{ad}_0(\mathfrak{g}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ad}_1(\mathfrak{h}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathfrak{h},\mathfrak{g}) \arrow[d]\\
\mathrm{ad}_0(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & \mathfrak{gl}(\mu)_0
\end{tikzcd}$$

因为我们已经知道如何积分 2 线性空间导出的李 2 代数, 我们进而只需将李 2 代数的扩张积分到李 2 群的扩张.

4.4 李 2 结构上的双复形

我们将李 2 代数写为群胚的神经:

$$\mathfrak{g}_0 \underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}} \mathfrak{g}_1 \;\overset{d_0,d_1,d_2}{\Lleftarrow}\; \mathfrak{g}_2 \;\overset{d_0,\dots,d_3}{\Lleftarrow}\; \mathfrak{g}_3 \;\overset{d_0,\dots,d_4}{\Lleftarrow}\; \cdots\cdots$$

并得到李 2 代数的双复形:

$$C_{CE}(\mathfrak{g}_0) \xrightarrow{\partial^*} C_{CE}(\mathfrak{g}_1) \xrightarrow{\partial^*} C_{CE}(\mathfrak{g}_2) \xrightarrow{\partial^*} C_{CE}(\mathfrak{g}_3) \xrightarrow{\partial^*} \cdots\cdots$$

其中每个纵方向都为 Chevalley-Eilenberg 上同调, 横向为神经导出的上链群列. 则可以证明此图映射都是交换的, 即其确实构成双复形. $H^2_{tot}(\mathfrak{g}_1)$ 中的元素形如 $(\omega,\varphi) \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}_0^* \oplus \mathfrak{g}_1^*$, 此时我们可以构造:

$$[(x_0,\lambda_0),(x_1,\lambda_0)]_\omega := ([x_0,x_1],-\omega(x_0,x_1)) \in \mathfrak{g}_0 \oplus^\omega \mathbb{R},$$
$$\mu_\varphi(y) = (\mu(y),\phi((y,0))).$$
$$L_{(x,\lambda)}y = L_x y.$$

并以此得到李 2 代数的扩张:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mu_\varphi"] & \mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{g}_0 \oplus^\omega \mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{g}_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

此时我们仍有:

命题 4.4.1. *$H^2_{tot}(\mathfrak{g}_1)$ 和李 2 代数 $\mathfrak{g}_1$ 关于 2 线性空间[1] $0 \to \mathbb{R}$ 的扩张有一一对应.*[2]

类似地, 我们考虑李 2 群的神经:

$$\begin{tikzcd}
G_0 & G_1 \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[l, shift left, "t"'] & G_2 \arrow[l, shift right=2, "d_0"'] \arrow[l, "d_1"'] \arrow[l, shift left=2, "d_2"'] & G_3 \arrow[l, shift right=3, "d_0"'] \arrow[l, shift right=1, "d_1"'] \arrow[l, shift left=1, "d_2"'] \arrow[l, shift left=3, "d_3"'] & \cdots\cdots \arrow[l, shift right=4, "d_0"'] \arrow[l, shift right=2, "d_1"'] \arrow[l, "d_2"'] \arrow[l, shift left=2, "d_3"'] \arrow[l, shift left=4, "d_4"']
\end{tikzcd}$$

$$C_{Grp}(G_0,\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial^*} C_{Grp}(G_1,\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial^*} C_{Grp}(G_2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial^*} C_{Grp}(G_3,\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial^*} \cdots\cdots$$

其中每个纵方向都为 Chevalley-Eilenberg 上同调, 横向为神经导出的上链群列. 则可以证明此图映射都是交换的, 即其**确实**构成**双复形**.

命题 4.4.2. *$H^2_{tot}(G_1)$ 和李 2 群 G_1 关于 Abel 2 群 $0 \to \mathbb{R}$ 的扩张有一一对应.*

[1]此时即为线性空间

[2]关于 2 线性空间 $0 \to V$ 扩张的讨论是完全类似的.

考虑每列上的 Van Est 映射 $\Phi_p : C_{Grp}(G_p, \mathbb{R}) \to C_{CE}(\mathfrak{g}_p)$, 则一系列 Φ_p 导出了李 2 群双复形到李 2 代数双复形的一个映射 Φ. 我们可证明:

命题 4.4.3. *Φ 是李 2 群双复形到李 2 代数双复形的一个同态.*

4.5 李 2 结构上特殊情形下的 Van Est 定理

考虑每列 Van Est 映射生成的映射锥 $M(\Phi_p)$, 则由映射锥的性质有:

引理 4.5.1. *若 G_p 是 n 连通的, 则 $H^k(M(\Phi_p)) = 0$, $k \leq n$.*

而由于 Φ 是李 2 群双复形到李 2 代数双复形的一个同态, 此时自然地, 每列的映射锥 $M(\Phi_p)$ 构成了一个双复形.

定理 4.5.2. *设 $G_\bullet$ 为李 2 群, 其交错模中 $H \to G_0$ 有 G_0 是 n–连通, H 为 $(n-1)$–连通. 则 $H^k_{tot}(M(\Phi)) = 0, k \leq n$.*

证明 由于集合上有 $G_1 \cong H \times G_0$, 根据 Kunneth 公式, 有

$$H^k(G_1) = \bigoplus_{a+b=n} H^a(H) \otimes H^b(G_0),$$

可得 G_1 为 $(k-1)$–连通的. 如此使用归纳法与 Kunneth 公式, 可得 G_p 均为 $(k-1)$–连通的. 正如我们在 Van Est 定理中所补充的, 使用谱序列可以直接得到 $H^k_{tot}(M(\Phi)) = 0, k \leq n$. □

我们在特殊情况下积分李 2 代数.

定理 4.5.3. *设 $\mathfrak{g}_\bullet$ 是李 2 代数, 使得 $\ker s \cap \mathfrak{C}(u(\mathfrak{g}_0)) = 0$, 其中 $\mathfrak{C}$ 为中心化子, 则李 2 代数 $\mathfrak{g}_\bullet$ 是可积的.*

证明 设 $\mathfrak{h} = \ker s$. 对于任意 $y \in \mathfrak{h}$, $y \neq 0$, 由条件有 $y \notin \mathfrak{C}(u(\mathfrak{g}_0))$. 这意味着存在 $x \in \mathfrak{g}_0$, $[y, u(x)] \neq 0$, 即 $-L_x y \neq 0$, 即 $\mathrm{ad}_1 y \neq 0$. 因此我们有 $\ker \mathrm{ad}_1 = 0$. 此时李 2 代数的 2–表示为:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{ad}_1"] \arrow[d, "\mu"] & \mathrm{ad}_1\mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker \mathrm{ad}_0 \arrow[r] & \mathfrak{g}_0 \arrow[r, "\mathrm{ad}_0"] & \mathrm{ad}_0(\mathfrak{g}_0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据前述讨论, $\mathrm{ad}_1(\mathfrak{h}) \to \mathrm{ad}_0(\mathfrak{g}_0)$ 可以被积分为 $H \to G$, 其中 H 为 1–连通, G 为 2–连通的. 则:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & (0) & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \ker \mathrm{ad}_0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1
\end{array}
$$

则由上述定理以及映射锥的性质知 $[\omega] \in H^2_{tot}(\mathrm{ad}_\bullet, \ker \mathrm{ad}_0) \cong H^2_{tot}(H \to G, \ker \mathrm{ad}_0)$, 则存在唯一的 $[\int \omega] \in H^2_{tot}(H \to G, \ker \mathrm{ad}_0)$, 因此我们可以导出 $H \to G$ 的交叉模扩张, 而此交叉模对应这原李 2 代数积分的李 2 群. $\square$

第 5 章 Van Est 定理的应用

5.1 简单李代数的积分

我们现在使用 Van Est 映射的方法来积分一些简单的李代数. 注意到在定义 Van Est 映射时我们有 C 到 F 的映射, 将其限制在 K, 对于 n 次余链 F, 展开便得到:

$$({}_n\tau F)(X_1,\ldots,X_n)=\frac{1}{n!}\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ldots,i_n)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\bigg|_{t_1=0}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_n}\bigg|_{t_n=0}F\left(\exp t_1X_1,\ldots,\exp t_nX_n\right).$$

此时若 $n=2$, 则有:

$$({}_2\tau F)(X,Y)=\frac{1}{2!}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\bigg|_{t_1=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\bigg|_{t_2=0}\left(F\left(\exp t_1X,\exp t_2Y\right)-F\left(\exp t_1Y,\exp t_2X\right)\right).$$

且注意到在李代数上同调中, 若 $f\in H^2_{CE}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$, 则有:

$$\begin{aligned}df(X_1,X_2,X_3)&=X_1f(X_2,X_3)-X_2f(X_1,X_3)+X_3f(X_1,X_2)\\&\quad-f([X_1,X_2],X_3)+f([X_1,X_3],X_2)-f([X_2,X_3],X_1)=0.\end{aligned}$$

以及李代数的扩张中:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r, "i"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma"] & 0. \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{h}$ 在 V 上的作用 $v^h=i^{-1}[i(v),\sigma(h)]$, 以及商子定义为 $\{g,h\}=[\sigma(g),\sigma(h)]-\sigma[g,h]$, $g,h\in\mathfrak{h}$. 仍考虑 $V\oplus_{\{\}}\mathfrak{h}$ 中的 Jacobi 恒等式, 我们可得到李代数的扩张等价类与其二阶上同调群有一一对应.

5.1.1 二维非平凡李代数

当 $\dim\mathfrak{g}=2$ 且为非交换李代数时, 我们熟知此时李代数同构于一种形式:

定义 5.1.1. *二维非平凡李代数同构于如下的 $\mathfrak{g}$, 其线性空间的基底为 X,Y, 李括号满足:*

$$[X,X]=0,\quad [Y,Y]=0,\quad [X,Y]=X.$$

我们统称其为二维非平凡李代数, 并默认考虑基底如上.

下面我们将使用 Van Est 定理将其积分为一李群. 首先考虑李代数的伴随表示的

正合列:

$$0 \longrightarrow \ker \mathrm{ad} \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0.$$

则由于 $\ker \mathrm{ad}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的中心, 而根据李代数构造知:

$$\tilde{X} = \mathrm{ad}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y} = \mathrm{ad}(Y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

知李代数的中心为零, 因此扩张中的 $V = 0$, $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$, 因此我们直接积分 $\mathfrak{h}$ 便可以得到 $\mathfrak{g}$ 的李群.

由于 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, 考虑指数映射 exp, 则我们可以获得到李群 G 的单位元邻域 U 的同胚:

$$\exp(a\tilde{X} + b\tilde{Y}) = \exp \begin{pmatrix} -b & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-b} & \frac{a(1-e^{-b})}{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

其中 $x > 0, y \in \mathbb{R}$. 而由于连通李群的单位元的 U 可以生成李群 $G = \bigcup_i U^i$, 我们将如上形式做乘积生成群, 得到:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x > 0, \, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

是 $\mathfrak{g}$ 的李群.

5.1.2 Heisenberg 李代数

下面我们考虑三维的李代数, 二维的非平凡李代数的特殊性在于其伴随表示同构于自身, 即李代数不存在中心. 下面我们考虑三维存在中心的李代数, 其复杂性高于上述例子.

定义 5.1.2. *一个 Heisenberg 李代数指的是一个三维李代数 $\mathfrak{g}$, 其基底为 X, Y, Z, 李括号由如下条件反交换线性生成 (忽略与自身的李括号):*

$$[X, Y] = 0, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = X.$$

我们首先考虑此李代数的伴随表示

$$0 \longrightarrow \ker \mathrm{ad} \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0.$$

写出伴随表示的矩阵形式

$$\mathrm{ad}(X)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde{Y}:=\mathrm{ad}(Y)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde{Z}:=\mathrm{ad}(Z)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

则此时 $\mathbb{R}\cong\ker\mathrm{ad}$, 其基底为 $X\in\mathfrak{g}$ 的原像, 记为 $\tilde{X}$. 并记 $\mathfrak{h}=\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, 此时由 $[\tilde{Y},\tilde{Z}]=\mathrm{ad}[Y,Z]=\mathrm{ad}(X)=0$ 知 $\mathfrak{h}$ 为二维交换李代数, 考虑李代数扩张的截面, 作用和商子:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] & \mathfrak{h} \arrow[l, bend left, "\sigma"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

由上述讨论知 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的作用由

$$\begin{aligned}\tilde{X}^{\tilde{Y}}&=i^{-1}[i(\tilde{X}),\sigma(\tilde{Y})]=i^{-1}[X,aX+Y]=0,\\ \tilde{X}^{\tilde{Z}}&=i^{-1}[i(\tilde{X}),\sigma(\tilde{Z})]=i^{-1}[X,bX+Z]=0.\end{aligned}$$

生成, 知 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的作用为零作用. 再考虑截面生成的商子:

$$i\left\{\tilde{Y},\tilde{Z}\right\}=[\sigma(\tilde{Y}),\sigma(\tilde{Z})]-\sigma[\tilde{Y},\tilde{Z}]=[aX+Y,bX+Z]=X.$$

可知商子为 $\left\{\tilde{Y},\tilde{Z}\right\}=\tilde{X}$ 生成的反对称双线性函数 $\{\}:\bigwedge^2\mathfrak{h}\to\mathbb{R}$.

下面我们将逐一将结构对应到李群上, 首先我们将李代数 $\mathfrak{h}$ 积分, 使用同样的指数映射的方法, 得到李群:

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

我们发现此时李群 H 中的元素可以用二元数对 (a,b) 唯一确定, 而矩阵李群恰好为其坐标的欧氏空间的嵌入子流形, 则我们表示李群的连续函数时, 可以将其限制在其坐

标上, 得到关于其坐标的连续函数. 容易看出 H 为单连通李群, 为考虑李群 H 上的二阶上同调, 我们先考虑将作用提升到李群上. 由下图:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}}"] \arrow[d, dashed, "Lie"] & \mathrm{Aut}(\mathbb{R}) \arrow[d, dashed, "Lie"] \\ \mathfrak{h} \arrow[r, "0_{\mathbb{R}}"] & \mathrm{End}(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

我们可知原李代数 $\mathfrak{h}$ 的作用导出了李群 H 的作用, 由于李代数的作用为零作用, 则李群的作用为平凡作用. 我们将李代数 $\mathfrak{h}$ 中的元素 $a\tilde{Y}+b\tilde{Z}$ 简记为 (a,b), 则我们李代数上的商子所对应的二阶同调群的元素 $f:\bigwedge^2\mathfrak{h}\to\mathbb{R}$ 应满足:

$$f(\tilde{Y},\tilde{Z})=\tilde{X},\quad f((1,0),(0,1))=1.$$

由 Van Est 定理, 我们知道存在李群二阶同调群中的元素 $F:H\times H\to\mathbb{R}$. 将 F 也写为四元光滑函数, 则由表达式有:

$$\begin{aligned}
1&=f(\tilde{Y},\tilde{Z})=({}_2\tau F)((1,0),(0,1))\\
&=\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\right|_{t_1=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\right|_{t_2=0}(F(\exp(t_1,0),\exp(0,t_2))-F(\exp(0,t_1),\exp(t_2,0)))\\
&=\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\right|_{t_1=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\right|_{t_2=0}(F((0,\exp t_1),(-\exp t_2,0))-F((-\exp t_1,0),(0,\exp t_2)))\,.
\end{aligned}$$

若此时我们选取 $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_4$, 则:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\right|_{t_1=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\right|_{t_2=0}(F((0,\exp t_1),(-\exp t_2,0))-F((-\exp t_1,0),(0,\exp t_2)))\\
=&\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\right|_{t_1=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\right|_{t_2=0}(-F((-\exp t_1,0),(0,\exp t_2)))\\
=&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\right|_{t_1=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\right|_{t_2=0}(\exp t_1\exp t_2)=1.
\end{aligned}$$

即 F 满足上述条件. 此时设 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, 仍以数对记 $(a,b)\in H$, 则我们此时可以选取

$\mathbb{R}\oplus^F H$ 上的群结构为:

$$\begin{aligned}(\lambda_1,(x_1,x_2))\cdot(\lambda_2,(x_3,x_4)) &= (\lambda_1+\lambda_2^{(x_1,x_2)}+F((x_1,x_2),(x_3,x_4)),(x_1+x_3,x_2+x_4))\\ &\xlongequal{\text{平凡作用}} (\lambda_1+\lambda_2+F((x_1,x_2),(x_3,x_4)),(x_1+x_3,x_2+x_4))\\ &= (\lambda_1+\lambda_2+2x_1x_4,(x_1+x_3,x_2+x_4)).\end{aligned}$$

若将其显化写出, 设 $(\lambda,(x,y))$ 对应着矩阵:

$$\begin{pmatrix}1 & x & \lambda/2\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

则有 $(\lambda_1,(x_1,x_2)),(\lambda_2,(x_3,x_4))$ 分别对应:

$$\begin{pmatrix}1 & x_1 & \lambda_1/2\\ 0 & 1 & x_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & x_3 & \lambda_2/2\\ 0 & 1 & x_4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

其矩阵乘积:

$$\begin{pmatrix}1 & x_1 & \lambda_1/2\\ 0 & 1 & x_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x_3 & \lambda_2/2\\ 0 & 1 & x_4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x_1+x_3 & (\lambda_1+\lambda_2+2x_1x_4)/2\\ 0 & 1 & x_2+x_4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

右端矩阵恰好对应 $(\lambda_1+\lambda_2+2x_1x_4,(x_1+x_3,x_2+x_4))=(\lambda_1,(x_1,x_2))\cdot(\lambda_2,(x_3,x_4))$.

定义 5.1.3. *定义 Heisenberg 群为如下的群:*

$$H_s=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

则上述的讨论说明, 此时我们的群扩张 $\mathbb{R}\oplus^F H\cong H_s$. 即我们得到, Heisenberg 李代数是 Heisenberg 群的李代数.

第 6 章 结语

在本文中我们证明的经典 Van Est 定理, 并使用其方法具体计算了两个低维李代数的积分. 在经典 Van Est 定理后我们补充了范畴论的观点, 这也与我们其后的讨论李 2 结构的 Van Est 定理一脉相承. 现代观点下的对称性可以由高阶结构和同伦等方式刻画, 本文涉及的李 2 结构特殊情况下的 Van Est 定理仅涉及简单的 2 结构, 而正如群的上同调可以由范畴的神经导出, 李 2 群上的表示与上同调也高度依赖范畴论的观点, 其内容可见 [11]. 更一般的高阶结构上类似的讨论已远超笔者能力所及, 本文的讨论也仅作抛砖引玉, 谨希望能够向读者提供些许帮助.

参考文献

[1] WARNER F W. Foundations of differentiable manifolds and lie groups[M]. Springer, 1983.

[2] MASAKI KASHIWARA P S. Sheaves on manifolds[M]. Springer, 1990.

[3] CHOW T. You could have invented spectral sequences[J]. Notices Of The American Mathematical Society, 2006: 15-19.

[4] HATCHER A. Algebraic topology[M]. Cambridge University Press, 2001.

[5] J. J. DUISTERMAAT J A C K. Lie groups[M]. Springer, 1999.

[6] EST W T V. Group cohomology and lie algebra cohomology in lie groups. i[J/OL]. Indagationes Mathematicae, 1953, 56: 484-492. DOI: 10.1016/S1385-7258(53)50061-7.

[7] TU L. An introduction to manifolds[M]. Springer, 2011.

[8] EST W T V. Group cohomology and lie algebra cohomology in lie groups. ii[J/OL]. Indagationes Mathematicae, 1953, 56: 493-504. DOI: 10.1016/S1385-7258(53)50062-9.

[9] ANGULO C. A cohomological proof for the integrability of strict lie 2-algebras [J/OL]. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2022, 19(14): 2250222. DOI: 10.1142/S021988782250222X.

[10] ANGULO C. A new cohomology theory for strict lie 2-algebras[J/OL]. Communications in Contemporary Mathematics, 2022, 24(03): 2150017. DOI: 10.1142/S0219199721500176.

[11] ANGULO C. Towards a new cohomology theory for strict lie 2-groups[A]. 2021.

致　谢

文成于此, 衷心感谢生云鹤老师所提供的机会与帮助, 以及 Camilo Angulo 博士所给予的悉心指导.

文末搁笔, 思绪繁杂. 回首往昔, 亦悲亦喜, 局促一室, 难觅沧海; 长夜漫漫, 苦旅难堪, 至亲挚友, 皆起灯盏; 追梦七载, 双亲翘盼, 昨日黑发, 今鬓渐白. 愿吾非朽木, 终成材以报.