

Van Est 定理及其应用

毕业论文答辩

田泽禹

导师: 生云鹤教授

吉林大学数学学院

2023 年 6 月 7 日



① 研究背景

② 研究方法 with 理论工具

- 微分流形, 李群与李代数
- 代数拓扑与同调代数
- 范畴论与高阶范畴化

③ 研究内容与结果

- Van Est 理论的必要内容
 - 平展空间与表示
 - 上同调结构
 - 二阶上同调与扩张
- 经典 Van Est 定理
- 特殊情况下李 2-群与李 2-代数的 Van Est 定理
 - 交叉模与 2-结构
 - 2-表示与上同调

④ 应用实例与创新点

- 简单李代数的积分
- 理论观点的创新

⑤ 参考文献

1 研究背景

2 研究方法 with 理论工具

- 微分流形, 李群与李代数
- 代数拓扑与同调代数
- 范畴论与高阶范畴化

3 研究内容与结果

- Van Est 理论的必要内容
- 经典 Van Est 定理
- 特殊情况下李 2-群与李 2-代数的 Van Est 定理

4 应用实例 with 创新点

- 简单李代数的积分
- 理论观点的创新

5 参考文献

研究背景

在 1870 年前后, Sophus.Lie 在求解微分方程时引入了李群的概念, 进而导出如今称为李代数的代数结构, Sophus.Lie 的工作开创并推动了李群与李代数的发展.

在 19 世纪末, 李群在代数学和拓扑学得到了迅速发展, 成为了数学的一个重要分支. 20 世纪 50 年代, 代数群论和代数几何的方法将李理论的发展推入了新的阶段. 在现代的观点下, 李理论通过李变换群与几何学, 拓扑学联系; 通过线性表示论与代数学, 分析学联系. 李群在数学物理以及量子物理中也有着重要应用.

李代数作为非结合代数, 其概念本身也得到了充分的抽象和研究. 单李代数的分类, 根系和李代数表示是李代数理论中精彩的问题. 李代数如今在数学以及古典力学, 量子力学中有重要的应用. 李群与李代数的理论各有丰富的成果, 两结构间的关系便自然成为重要的研究命题.

研究背景

在经典李理论中,李群是连续且全局的,而李代数是离散且局部的,数学中一重要问题便是衡量两者间的关系.李群可以局部微分得到李代数,而李的第三定理保证有限维李代数积分成为一个李群.此定理的一个传统证明是利用 Ado 定理,将李代数嵌入为有限维线性李代数,再通过李子群与李子代数的对应关系得到所求解.经典方法往往涉及复杂的分析学手段.

1953 年, W. T. Van Est 发表了一篇有关李群与李代数上同调的论文, 在此论文中他构造了李群的群上同调到李代数上同调的 Van Est 映射, 并使用 de Rham 上同调来控制 Van Est 映射的性质. 由于群扩张, 李代数扩张的等价类与其二阶上同调群有一一对应. 作为推论, 在一定条件下, 对于给定的李代数扩张我们可以找到其李群扩张, 进而从几乎纯几何与代数方法得到李的第三定理的证明. 也正因此 Van Est 的方法极富有拓展性. 目前 Van Est 定理的研究内容扩展到范畴上, 进而产生了李 2 群, 李 2 代数, 李群胚上的 Van Est 定理一系列丰富的结果.

1 研究背景

2 研究方法 with 理论工具

- 微分流形, 李群与李代数
- 代数拓扑与同调代数
- 范畴论与高阶范畴化

3 研究内容与结果

- Van Est 理论的必要内容
- 经典 Van Est 定理
- 特殊情况下李 2-群与李 2-代数的 Van Est 定理

4 应用实例 with 创新点

- 简单李代数的积分
- 理论观点的创新

5 参考文献

微分流形, 李群与李代数

微分流形的定义以及结论主要应用于定义李群的结构, 以及定义微分流形上的向量丛, 微分流形上的 de Rham 上同调. 关于李群李代数, 我们主要依赖以下结论:

定理

设 G 为李群, 其李代数为 \mathfrak{g} , 设 $\tilde{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ 为李子代数. 则存在 G 的唯一的连通李子群 (H, φ) 使得 $d\varphi(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.

定理 (李代数同态的积分)

设 G 和 H 均为李群, 其李代数分别为 \mathfrak{g} 和 \mathfrak{h} , 且 G 为单连通李群. 设 $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ 为李代数的同态, 则存在唯一的李群同态 $\varphi: G \rightarrow H$ 使得 $d\varphi = \psi$.

定理

每个连通李群都有单连通的覆盖空间, 其本身构成一个李群, 且覆盖映射是李群的同态. 此泛覆盖空间的李代数与原李群的李代数相同.

代数拓扑与同调代数

论文中使用了众多代数拓扑中的概念与结论, 包括基本群, 同调群, 上同调群; 以及相应的计算方法, 如同伦不变性, Mayer-Vietoris 序列, 泛系数公式, Kunneth 公式等. 其理论可以推广至一般 Abel 范畴上, 因此我们直接在 Abel 范畴上给出上同调的定义, 并给出复形的映射锥的概念与性质, 以及计算上同调的谱序列方法. 应用在李群与李代数上, Van Est 定理依赖于以下结论:

定理

若 G 是单连通李群, 则 $H^2(G; \mathbb{R}) = 0$.

定理 (de Rham 定理)

对于任意光滑流形 M 和非负整数 k , de Rham 同态 $l: H^k_{dR}(M) \rightarrow H^k(M; \mathbb{R})$ 是同构.

范畴论与高阶范畴化

文章中经典 Van Est 定理中群上同调的形式可以由范畴的神经 (Nerve) 给出, 同时 Van Est 定理的结论可以推广至范畴结构上, 得到李 2-群与李 2-代数的 Van Est 定理. 注意到群胚的严格么半范畴如果是群则构成严格 2-群, 在群胚上考虑, 给出定义:

定义 (2-向量空间)

一个 2-向量空间指的是以下结构:

$$V_1 \times_{V_0} V_1 \xrightarrow{m} V_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} V_0 \xrightarrow{u} V_1.$$

其中的空间均为线性空间, 出现的映射均为线性映射, 且 $su = tu = \text{Id}$. V_1 可视为 V_0 作为范畴上的态射. $V_1 \times_{V_0} V_1 = \{(v_1, v_1') \mid s(v_1) = t(v_1'), v_1, v_1' \in V_1\}$, $u(v_0)$ 为 m 复合映射的单位元.

范畴论与高阶范畴化

定义 (2-群)

一个 2-群指的是以下结构:

$$G_1 \times_{G_0} G_1 \xrightarrow{m} G_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} G_0 \xrightarrow{u} G_1.$$

其中的结构均为群, 出现的映射均为群同态, 且 $su = tu = \text{Id}$. G_1 可视为 G_0 作为范畴上的态射. $G_1 \times_{G_0} G_1 = \{(g_1, g'_1) \mid s(g_1) = t(g'_1), g_1, g'_1 \in G_1\}$, $u(g_0)$ 为 m 复合映射的单位元. 如果群均为李群, 映射均为李群同态, 此结构则称为李 2 群.

定义 (李 2-代数)

一个李 2-代数指的是以下结构:

$$\mathfrak{g}_1 \times_{\mathfrak{g}_0} \mathfrak{g}_1 \xrightarrow{m} \mathfrak{g}_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathfrak{g}_0 \xrightarrow{u} \mathfrak{g}_1$$

其中的结构均为李代数, 出现的映射均为李代数同态, 且 $su = tu = \text{Id}$. \mathfrak{g}_1 可视为 \mathfrak{g}_0 作为范畴上的态射. $\mathfrak{g}_1 \times_{\mathfrak{g}_0} \mathfrak{g}_1 = \{(x_1, x'_1) \mid s(x_1) = t(x'_1), x_1, x'_1 \in \mathfrak{g}_1\}$, $u(x_0)$ 为 m 复合映射的单位元.

1 研究背景

2 研究方法 with 理论工具

- 微分流形, 李群与李代数
- 代数拓扑与同调代数
- 范畴论与高阶范畴化

3 研究内容 with 结果

- Van Est 理论的必要内容
 - 平展空间与表示
 - 上同调结构
 - 二阶上同调与扩张
- 经典 Van Est 定理
- 特殊情况下李 2-群与李 2-代数的 Van Est 定理
 - 交叉模与 2-结构
 - 2-表示与上同调

4 应用实例 with 创新点

- 简单李代数的积分
- 理论观点的创新

5 参考文献

平展空间与表示

在经典 Van Est 定理中, 有限维向量空间作为平展空间. 假设有限维向量空间 V , 则有 $\mathfrak{gl}(V)$ 为李代数, $GL(V)$ 为李群.

设 \mathfrak{g} 为有限维李代数, 则其在有限维向量空间 V 上的表示为李代数同态 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$; 设 G 为李群, 则其在有限维向量空间 V 上的表示为李群同态 $\rho: G \rightarrow GL(V)$.

de Rham 上同调 (带有表示 π)

M 定义为光滑流形, V 为有限维非零实线性空间, 映射均为光滑 $M \rightarrow V$ 映射. 一个 n 次外形式 ω 是 M 上向量场 X_1, \dots, X_n 的 n 元线性交错型, 每个 $\omega(X_1, \dots, X_n)$ 是 $M \rightarrow V$ 的映射, 其在 s 处的值记为 $\omega(X_1, \dots, X_n, s)$. 文中我们定义 $\pi(X) \in \text{End}(V)$, 定义边缘算子为 (此处 X_i 为切场):

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i X_i \omega(X_1, \hat{\cdot}, X_{n+1}) \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \hat{\cdot}, X_{n+1}) \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \pi(X_i) \omega(X_1, \hat{\cdot}, X_{n+1}) \end{aligned}$$

此时 $d \circ d = 0$, 并定义了带有表示的 de Rham 上同调.

田泽禹

则类似的, 此时有 $d^{n+1} \circ d^n = 0$, 并定义李群的上同调群.

二阶群上同调与群扩张

定义

设 V 为 Abel 群, G 为任意群, 称群 E 为群 G 关于 V 的群扩张, 如果存在群的正合列

$$1 \rightarrow V \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1.$$

定义

我们说两个扩张是同构的, 如果其正合列:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 1 & \longrightarrow & V' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{\pi'} & G' & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

是同构的, 即其中 α, β, γ 均为同构; 如果此时 $\alpha = \text{Id}_V, \gamma = \text{Id}_G$, 我们称两扩张是等价的.

二阶群上同调与群扩张

此时我们可以证明:

定理

给定 V, G , 则群扩张的等价类和上同调群 $H^2(G, V)$ 有一一对应.

关于李代数的情况是完全类似的, 此时李代数的扩张定义为短正合列:

$$0 \rightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0.$$

其中 \mathfrak{h} 为 Abel 李代数.
二阶上同调与代数结构的扩张的等价类的一一对应, 是 Van Est 定理证明中的关键定理.

Van Est 双复形 (Van Est 表法)

设 $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_r$ 为 r 个李代数 \mathfrak{g} , G_1, \dots, G_s 为 s 个李群 G . 我们定义 r, s -上链为函数 $f: (\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_r, G_1, \dots, G_s) \rightarrow V$, 其关于李代数部分是 r 交错线性的, 关于李群部分为光滑的. 定义 rF^s 为所有的 $r-s$ 上链, $0-0$ 上链为 V 中元素. 再定义:

$$\begin{aligned} {}^rF &= \sum_s^r F^s, & F^s &= \sum_r^r F^s, & F &= \sum_r^r F^s, \\ {}^rA &= \sum_{i>r}^i F, & A^r &= \sum_{i>r} F^i, & {}^rA^s &= \sum_{i>r, j>s}^i F^j. \end{aligned}$$

此时有 0F 为群上同调的上链群 C , F^0 为代数上同调的上链群 K , F^1 为李群外微分形式上同调的上链群 D . 我们定义此双复形中的边缘算子. 设上边缘算子两方向由 d', δ' 给出, 对于 r 方向, 在 F^0 上, 令 d' 为李代数上同调中的 d .

Van Est 双复形 (Van Est 表法)

记

$$\delta^0 f(a_1, \dots, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1, \dots, a_n).$$
(2)

如果 f 是 r - s 上链, $s \geq 1$. 定义:

$$f_{a_2, \dots, a_s}(X_1, \dots, X_r, a_1) = f(X_1, \dots, X_r, a_1, \dots, a_s).$$
(3)

定义 $d'f \in {}^{r+1}F^s$ 为:

$$d'f(X_1, \dots, X_{r+1}, a_1, \dots, a_s) = df_{a_2, \dots, a_s}(X_1, \dots, X_{r+1}, a_1).$$
(4)

其中 d 为李群外微分形式上同调边缘算子. 此时易知在 r 方向, $d' d' = 0$. 对于 s 方向, 在 0F 上, 定义 $\delta' = \delta$ 为李群上同调的边缘算子. 在 r - s 上链群处, 设 $f \in {}^rF^s, \geq 1$, 定义:

$$f_{X_1, \dots, X_r}(a_1, \dots, a_s) = f(X_1, \dots, X_r, a_1, \dots, a_s),$$
(5)

和

$$\delta' f(X_1, \dots, X_r, a_1, \dots, a_{s+1}) = \delta^0 f_{X_1, \dots, X_r}(a_1, \dots, a_{s+1}).$$
(6)

Van Est 双复形 (Van Est 表法)

此时有 $\delta' \delta' = 0$. 且容易验证 $d' \delta' f = \delta' d' f$. 此时 F 构成双复形, 定义双复形的边缘算子为 $\Delta f = d' f + (-1)^r \delta' f, f \in {}^r F^s$. 则由双复形的一般理论知 $\Delta \Delta = 0$. 我们有:

定理

投影映射 $\sigma : F \rightarrow {}^0F = C$ 作为复形间的同态, 导出了同调群的同构: $\phi : H(F) \rightarrow H(C)$.

定义复形逆, 首先定义:

$$f_{i; x_1, \dots, \hat{x}_i, x_n}(y) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (7)$$

对于李群 G 上的切场 X , 我们定义其在 (G_1, \dots, G_n) 上诱导的切场 $\partial_i(X)$ 为:

$$(\partial_i(X)f)(x_1, \dots, x_n) = (Xf_{i; x_1, \dots, x_n})(x_i). \quad (8)$$

则若 X_1, \dots, X_k 为 G 上的切场, 有 $\partial_1(X_1), \dots, \partial_k(X_k)$ 是 (G_1, \dots, G_n) 上可换的切场.

Van Est 双复形 (Van Est 表法)

现设 $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{g}$, 我们定义 τf 的 r -($n-r$) 分量为:

$$\begin{aligned}
 & ({}_r\tau f)(X_1, \dots, X_r, a_1, \dots, a_{n-r}) \\
 &= \frac{1}{r!} \sum \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_r) (\partial_1(X_{i_1}) \dots \partial_r(X_{i_r}) f)(e_G, \dots, e_G, a_1, \dots, a_{n-r}) \\
 &= \frac{1}{r!} \sum \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_r) \partial_{(r)} f_{e_G, \dots, e_G, a_1, \dots, a_{n-r}}(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \\
 &= \operatorname{Alt}_X \partial_{(r)} f_{e_G, \dots, e_G, a_1, \dots, a_{n-r}}(X_1, \dots, X_r).
 \end{aligned} \tag{9}$$

其中 Alt_X 指对李代数部分求交错和:

$$\partial_{(r)} f_{e_G, \dots, e_G, a_1, \dots, a_{n-r}}(X_1, \dots, X_r) = (\partial_1(X_1) \dots \partial_r(X_r) f)(e_G, \dots, e_G, a_1, \dots, a_{n-r}).$$

此外, 补充定义:

$$\begin{aligned}
 {}_r\tau f &= 0, & \text{若 } r < 0 \text{ 或 } r > n; \\
 {}_r\tau f &= f, & \text{若 } r = 0.
 \end{aligned}$$

Van Est 定理

由此我们可以证明 Van Est 定理:

定理 (Van Est)

若 $H^1(D) = \cdots = H^k(D) = 0$, 则有

- (i) $H^0(Z) = H^1(Z) = \cdots = H^{k+1}(Z) = 0$;
(ii) τ_0 在 $i = 0, 1, \dots, k$ 时导出 $H^i(C) \cong H^i(K)$, 以及 $k+1$ 时单射 $H^{k+1}(C) \rightarrow H^{k+1}(K)$.

定义 (k -连通)

若 $H^1(D) = \cdots = H^k(D) = 0$, 我们称李群为 k -连通的.

我们现在证明, 任何一个有限维李代数 \mathfrak{g} 都可以积分成为一个李群.

定理

任何一个有限维李代数 \mathfrak{g} , 都存在一个李群 G , 使得 \mathfrak{g} 是 G 的李代数.

交叉模与 2-结构

定义

一个李代数上的交叉模指的是李代数的同态 $\mathfrak{h} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{g}$, 以及李代数表示 $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{Der}(\mathfrak{h})$, 使得:

- (i) $\mu(L_x y) = [x, \mu(y)], y \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{g}$,
- (ii) $L_{\mu(y_0)} y_1 = [y_0, y_1], y_0, y_1 \in \mathfrak{h}$.

定理

李代数的交叉模结构与李 2 代数结构一一对应.

李群的情况完全类似不予赘述, 在此之后所有的 2-结构均以交叉模表示.

$\mathfrak{gl}(\phi)_0 := \text{End}(\phi)$ 中的元素 $(F, f) \in \mathfrak{gl}(W) \oplus \mathfrak{gl}(V)$ 为李子代数. 且有 $t(\alpha; 0, 0) = (\alpha\phi, \phi\alpha)$. 我们仅需要积分交叉模.

李 2-代数在 2-线性空间上的表示

我们在交叉模上考虑.

定义

设李 2 代数给出交叉模 $\mathfrak{h} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{g}$, 则李 2 代数的一个表示为下述李代数同态的交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\rho_1} & \text{Hom}(V, W) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \Delta \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\rho_0} & \mathfrak{gl}(\phi)_0 \end{array}$$

满足一切自然的交叉模的兼容性条件与同态条件.

李 2-代数的伴随表示

我们给出李 2 代数的伴随表示, 仍在交叉模上讨论, 则对于李 2 代数 $\mathfrak{h} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{g}$, 考虑如下表示:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\text{ad}_1} & \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \Delta \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}_0} & \mathfrak{gl}(\mu)_0 \end{array}$$

其中 $\text{ad}_1(y) = -L_{(\cdot)}y$, $\text{ad}_0(x) = (L_x, \text{ad}_x)$.

李 2-代数的扩张

此时我们有:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \ker \operatorname{ad}_1 & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \operatorname{ad}_1(\mathfrak{h}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \mu & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \ker \operatorname{ad}_0 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \operatorname{ad}_0(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \operatorname{ad}_1(\mathfrak{h}) & \hookrightarrow & \operatorname{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \operatorname{ad}_0(\mathfrak{g}) & \hookrightarrow & \mathfrak{gl}(\mu)_0
 \end{array}$$

因为我们已经知道如何积分 2-线性空间导出的李 2-代数, 我们进而只需将李 2-代数的扩张积分到李 2-群的扩张.

李 2-群的上同调

类似地, 我们考虑李 2-群的神经:

$$\begin{array}{ccccccc}
 G_0 & \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & G_1 & \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \end{array} & G_2 & \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \\ \xleftarrow{d_3} \end{array} & G_3 & \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \\ \xleftarrow{d_3} \\ \xleftarrow{d_4} \end{array} & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

$$C_{Grp}(G_0, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial^*} C_{Grp}(G_1, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial^*} C_{Grp}(G_2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial^*} C_{Grp}(G_3, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial^*} \dots\dots\dots$$

其中每个纵方向都为 Chevalley-Eilenberg 上同调, 横向为神经导出的上链群列. 则可以证明此图映射都是交换的, 即其确实构成双复形. 并且完全类似地有李 2-代数的结论.

特殊情况下李 2-群与李 2-代数的 Van Est 定理

考虑每列 Van Est 映射生成的映射锥 $M(\Phi_p)$, 则由映射锥的性质有:

引理

若 G_p 是 n 连通的, 则 $H^k(M(\Phi_p)) = 0, k \leq n$.

而由于 Φ 是李 2 群双复形到李 2 代数双复形的一个同态, 此时自然地, 每列的映射锥 $M(\Phi_p)$ 构成了一个双复形.

定理

设 G_\bullet 为李 2 群, 其交错模中 $H \rightarrow G_0$ 有 G_0 是 n -连通, H 为 $(n-1)$ -连通. 则 $H_{tot}^k(M(\Phi)) = 0, k \leq n$.

我们在特殊情况下积分李 2 代数.

定理

设 \mathfrak{g}_\bullet 是李 2 代数, 使得 $\ker s \cap \mathfrak{C}(u(\mathfrak{g}_0)) = 0$, 其中 \mathfrak{C} 为中心化子, 则李 2 代数 \mathfrak{g}_\bullet 是可积的.

1 研究背景

2 研究方法 with 理论工具

- 微分流形, 李群与李代数
- 代数拓扑与同调代数
- 范畴论与高阶范畴化

3 研究内容与结果

- Van Est 理论的必要内容
- 经典 Van Est 定理
- 特殊情况下李 2-群与李 2-代数的 Van Est 定理

4 应用实例 with 创新点

- 简单李代数的积分
- 理论观点的创新

5 参考文献

二维非平凡李代数的积分

定义

二维非平凡李代数同构于如下的 \mathfrak{g} , 其线性空间的基底为 X, Y , 李括号满足:

$$[X, X] = 0, \quad [Y, Y] = 0, \quad [X, Y] = X.$$

我们统称其为二维非平凡李代数, 并默认考虑基底如上.

使用 Van Est 定理中的构造过程, 得到:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x > 0, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

是 \mathfrak{g} 的李群.

Heisenberg 李代数的积分

定义

一个 Heisenberg 李代数指的是一个三维李代数 \mathfrak{g} , 其基底为 X, Y, Z , 李括号由如下条件反交换线性生成 (忽略与自身的李括号):

$$[X, Y] = 0, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = X.$$

定义 Heisenberg 群为如下的群:

$$H_s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

使用 Van Est 定理的构造, 配合指数映射, 以及带有商子的推广半直积结构可以证明, 其为 Heisenberg 李代数的李群.

Van Est 双复形 (新)

在 Nerve 和 Foliation 的观点下可以将 Van Est 双复形改写为如下交换图, 其 Total complex 的性质完全可以由谱序列刻画.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \wedge^{\dim \mathfrak{g}} \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \Omega^{\dim \mathfrak{g}}(G) & \longrightarrow & & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \wedge^2 \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \Omega^2(G) & \longrightarrow & \Omega^2(G^2) & \longrightarrow & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \Omega^1(G) & \longrightarrow & \Omega^1(G^2) & \longrightarrow & \Omega^1(G^3) \longrightarrow \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbb{R} & \longrightarrow & C(G) & \longrightarrow & C(G^2) & \longrightarrow & C(G^3) \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbb{R} & \longrightarrow & C(G) & \longrightarrow & C(G^2) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Chevalley-Eilenberg 上同调与分次代数

设 f 为 n 阶上闭链, $X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathfrak{g}$, 上边缘算子定义为:

$$\begin{aligned} (df)(X_1, \dots, X_{n+1}) = & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i f(X_1, \hat{\cdot}, X_{n+1}) \\ & + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], X_1, \hat{\cdot}, X_{n+1}). \end{aligned}$$

假设 $[\cdot, \cdot]$ 是 \mathfrak{g} 为线性空间上的一个反对称双线性算子, 即 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, 则其有对偶映射 $d_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, 则有

$$d_{\mathfrak{g}}^2 = 0 \iff C_{s, (\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \forall s, \alpha, \beta, \gamma \iff [\cdot, \cdot] \text{ 满足 Jacobi 恒等式, 为 Lie 括号.}$$

1 研究背景

2 研究方法 with 理论工具

- 微分流形, 李群 with 李代数
- 代数拓扑 with 同调代数
- 范畴论 with 高阶范畴化

3 研究内容 with 结果

- Van Est 理论的必要内容
- 经典 Van Est 定理
- 特殊情况下李 2-群 with 李 2-代数的 Van Est 定理

4 应用实例 with 创新点

- 简单李代数的积分
- 理论观点的创新

5 参考文献

参考文献 I

[Ang21] Camilo Angulo.
Towards a new cohomology theory for strict lie 2-groups, 2021.

[Ang22a] Camilo Angulo.
A cohomological proof for the integrability of strict lie 2-algebras.
International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 19(14):2250222, 2022.

[Ang22b] Camilo Angulo.
A new cohomology theory for strict lie 2-algebras.
Communications in Contemporary Mathematics, 24(03):2150017, 2022.

[Cho06] Timothy Chow.
You could have invented spectral sequences.
Notices Of The American Mathematical Society, pages 15–19, 2006.

[Est53a] W. T. Van Est.
Group cohomology and lie algebra cohomology in lie groups. i.
Indagationes Mathematicae, 56:484–492, 1953.

[Est53b] W. T. Van Est.
Group cohomology and lie algebra cohomology in lie groups. ii.
Indagationes Mathematicae, 56:493–504, 1953.

参考文献 II

- [Hat01] Allen Hatcher.
Algebraic Topology.
 Cambridge University Press, 2001.
- [JJD99] J. A. C. Kolk J. J. Duistermaat.
Lie Groups.
 Springer, 1999.
- [MK90] Pierre Schapira Masaki Kashiwara.
Sheaves on Manifolds.
 Springer, 1990.
- [Tu11] Loring Tu.
An Introduction to Manifolds.
 Springer, 2011.
- [War83] Frank W. Warner.
Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.
 Springer, 1983.

Thanks!