高等代数 II

第 11 次讨论班

2023 年 5 月 6 日

本次讲义为二次型相关内容. **关于合同对角化的讨论, 见本次补充讲义.**

问题 1. 基础知识

(i) 叙述合同变换, 两矩阵合同, 合同初等变换的定义.

(ii) 对称矩阵的合同标准型.

(iii) 复数域上对称矩阵的合同标准型.

(iv) 实数域上对称矩阵的合同标准型.

(v) 实对称矩阵的正交相似标准型.

(vi) 实对称矩阵 (实二次型) 的正负惯性指数的定义.

(vii) 正定矩阵, 半正定矩阵, 负定矩阵, 半负定矩阵, 不定矩阵的定义.

(viii) 正定二次型, 半正定二次型, 负定二次型, 半负定二次型的定义.

问题 2. 证明 $\Omega^{n\times n}$ 上的函数 $Q(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2$ 为二次函数, 并写出其在基底 $\boldsymbol{E}_{ij}$ (先 j 变动, 后 i 变动的逐行顺序) 下的对称矩阵.

问题 3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 证明必存在正数 M 使得对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ 均有 $\left|\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\right| \leq M\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$.

问题 4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 则下列等价:

(i) $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵;

(ii) 有矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$;

(iii) $\boldsymbol{A}$ 的主子式均非负;

(iv) $\boldsymbol{A}$ 的特征根均非负.

问题 5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 则下列等价:

(i) $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵;

(ii) 有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$;

(iii) $\boldsymbol{A}$ 的主子式均大于 0;

(iv) $\boldsymbol{A}$ 的特征根均大于 0;

(v) $\boldsymbol{A}$ 的主要主子式均大于 0.

问题 6. 证明若两个 (半) 正定矩阵可换, 则其乘积仍为 (半) 正定矩阵.

问题 7. 设矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

为正定矩阵且 $\boldsymbol{B} \neq \mathbf{0}$. 证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} < |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|.$$