Linear Algebra II

Supplementaries - 11

ζ

May 6, 2023

1 合同标准型

Problem 1.1. 证明下列关于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的命题等价:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是正定阵;

(2) 存在主对角线上元素全等于 1 的上三角矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{D}$ 是正定对角矩阵;

(3) 存在主对角线上元素全为正的上三角矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$.

Problem 1.2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必合同于下列形状的分块矩阵:

$$\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{S},\ldots,\boldsymbol{S},0,\ldots,0\right\},$$

其中 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. [Hint] 使用归纳法.

2 (?) 定矩阵与合同对角化

Problem 2.1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆实对称矩阵, $\boldsymbol{S}$ 是实反对称矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 是正定阵, $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}$ 是半正定阵.

Problem 2.2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆实对称矩阵, $\boldsymbol{S}$ 是实反对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}$, 求证: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}$ 是可逆矩阵. [Hint] 考虑对矩阵 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\right)$.

Problem 2.3. 若 $bA=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 n 阶正定矩阵, 求证 Hardmard 积 $\boldsymbol{H}=(a_{ij}b_{ij})$ 也是正定矩阵.

Problem 2.4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是同阶半正定实对称矩阵. 求证:

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|,$$

等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

Problem 2.5. 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 为半正定实对称矩阵, 求证: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

Problem 2.6. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 求证: 存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}, \quad \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n\}.$$

Problem 2.7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{S}$ 是同阶实反对称矩阵, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}, \quad \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right\}.$$

Problem 2.8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, 已知 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T$ 正定, 求证:

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T| \leq 2^n|\boldsymbol{A}|,$$

等号成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

Problem 2.9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{S}$ 是同阶实反对称矩阵, 证明:

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{S}| \geq |\boldsymbol{A}|.$$

等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{O}$.

3 综合问题

Problem 3.1. 求证: 任一 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都相似于一个复对称矩阵. [Hint] 回忆任一复方阵可表示为两复对称阵的乘积, 并可以指定其中任一为非奇异矩阵.