

# 高等代数 II

## 第 10 次讨论班

2023 年 5 月 5 日

本次讲义为正规矩阵与内积空间间的线性变换相关内容.

**问题 1.** 基础知识, 回答如下问题

- (i) 叙述矩阵酉相似, 正交相似, 正规矩阵的定义;
- (ii) 叙述酉相似与正规矩阵的关系与性质;
- (iii) 叙述 Schur 三角化定理;
- (iv) 叙述正规矩阵的酉相似标准型定理;
- (v) 叙述实正规矩阵的正交相似标准型定理;
- (vi) 叙述  $\sigma$  作为有限维内积空间  $V$  线性变换的伴随变换的定义.

**问题 2.** 基础知识, 叙述以下矩阵特征值的性质, 叙述你的理由

- (i) Hermite 矩阵, 斜 Hermite 矩阵, 酉矩阵;
- (ii) 实对称矩阵, 实反对称矩阵, 正交矩阵.

**问题 3.** 设  $\lambda$  是  $A$  的特征根,  $\mu$  是  $A^H$  的特征根, 且  $\lambda \neq \bar{\mu}$ , 证明  $A$  的属于  $\lambda$  的特征向量与  $A^H$  的属于  $\mu$  特征向量正交.

**问题 4.** 设  $A, B$  均为正规矩阵, 且  $A$  的特征向量均为  $B$  的特征向量. 证明  $AB$  仍为正规矩阵.

**问题 5.** 设  $A$  是正规矩阵, 证明线性方程组  $Ax = 0$  与  $A^Hx = 0$  同解.

**问题 6.** 设  $\sigma$  是  $n$  维内积空间  $V$  的线性变换, 则下列等价:

- (i)  $\sigma$  为等距变换;
- (ii)  $\sigma$  把规范正交基变为规范正交基;
- (iii)  $\sigma$  不改变向量的长度;
- (iv)  $\sigma$  不改变向量的内积.