Linear Algebra II

Supplementaries - 10

ζ

May 5, 2023

1 正规矩阵与正规算子

Problem 1.1. 设 V 是 n 维内积空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的正规算子, 则有对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有 $\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})\| = \|\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\alpha})\|$

Problem 1.2. 设 V 是 n 维内积空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的正规算子, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中的非零向量, 求证: $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 属于其特征值 λ 的特征向量的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

1.1 正规算子的等价刻画

Problem 1.3. 设 V 是 n 维酉空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, 求证: $\boldsymbol{\varphi}$ 是正规算子的充要条件是对 V 中任意的向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 都有 $\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})\| = \|\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\alpha})\|$.

Problem 1.4. 设 V 是 n 维酉空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, 求证: $\boldsymbol{\varphi}$ 是正规算子的充要条件是若 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 属于特征值 λ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{v}$ 也是 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量. [Hint] 可以考虑归纳法.

Problem 1.5. 设 V 是 n 维酉空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, 求证: $\boldsymbol{\varphi}$ 是正规算子的充要条件是 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2$, 其中 $\boldsymbol{\varphi}_1$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2$ 是子伴随算子且 $\boldsymbol{\varphi}_1\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_2\boldsymbol{\varphi}_1$.

Problem 1.6. 设 V 是 n 维酉空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, 求证: $\boldsymbol{\varphi}$ 是正规算子的充要条件是存在某个复系数多项式 $f(x)$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}^* = f(\boldsymbol{\varphi})$.

Problem 1.7. 设 V 是 n 维酉空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, 求证: $\boldsymbol{\varphi}$ 是正规算子的充要条件是 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\psi}$, 其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为酉算子, $\boldsymbol{\psi}$ 是半正定自伴随算子, 且 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{\psi}$ 可交换.

Problem 1.8. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶复矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是其特征值, 求证: $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2.$$

1.2 同时 (对合) 对角化

Problem 1.9. 设 $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ 是 n 维欧氏空间 (酉空间) V 上的两个自伴随算子 (正规算子), 求证: V 有一组由 $\boldsymbol{\varphi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 的公共特征向量构成的标准正交基的充要条件是 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}$.

Problem 1.10. 设 $\boldsymbol{A}_1\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ 是 m 个实对称矩阵 (复正规矩阵) 且两两可换, 求证: 存在正交矩阵 (酉矩阵) $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{P}$) 都是对角矩阵. [Hint] 考虑归纳法.

Problem 1.11. 设 V 是 n 维内积空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的正规算子, U 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的不变子空间. 求证: U 也是 $\boldsymbol{\varphi}^*$ 的不变子空间, 从而 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 U 上的限制仍然是一个正规算子.

Problem 1.12. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶实正规矩阵且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 求证: 存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}$ 和 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}$ 同时为正交相似标准型.