高等代数 II

第 9 次讨论班

2023 年 4 月 26 日

本次讲义为特 λ–矩阵相关内容.

问题 1. 思考如下问题

(1) 叙述内积的定义.
(2) 证明 Cauchy-Schwarz 不等式.
(3) 证明三角不等式.
(4) 叙述 Gram-Schmidt 正交化的过程.

问题 2. 设 $V = C[-1,1]$ 为实值连续函数线性空间, 对任意 $f(x), g(x) \in V$, 定义

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明这是一个内积空间.

问题 3. 设 $V = \Omega^{n\times n}(\Omega = \mathbb{C}, \mathbb{R})$, 规定 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^H)$, 验证此时是否构成一内积空间.

问题 4. 设 V 为 $1, \cos x, \ldots, \cos nx$ 为基底张成的实线性空间. 在 V 上定义内积:

$$(f(x), g(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

试找出一组规范正交基.

问题 5. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上所有次数小于 3 的的多项式构成的线性空间. 规定内积如下:

$$(f(x), g(x)) = \int_{0}^{N} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad N > 0.$$

使用 Gram-Schmidt 正交化方法将 $1, x, x^2$ 规范正交化.

问题 6. 设 W 是 n 维内积空间 V 的子空间, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ 是 W 的规范正交基, $\boldsymbol{u} \in V$. 证明: $\boldsymbol{u} \in W$ 当且仅当

$$|\boldsymbol{u}|^2 = |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1)|^2 + |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2)|^2 + \cdots + |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_m)|^2.$$

问题 7. 设 V 是 Ω 上的 n 维欧氏空间, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ 是 V 的基底. 试给出 V 上的内积, 使得

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$