Linear Algebra II

Supplementaries - 7

ζ

April 27, 2023

1 矩阵与映射的分解

1.1 QR 分解

方阵情况下，通过 Schmidt 正交化，将一个非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分解为一个酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和一个正线上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的乘积, 此分解唯一.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{R}.$$

1.2 Doolittle 分解

对于一个所有顺序主子式都不为零的方阵 $\boldsymbol{A}$ (此时已经说明方阵非奇异), 其可以分解为一个单位下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和一个非奇异上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的乘积, 此分解唯一.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}.$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ * & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & & & & * \\ & u_{22} & & & \\ & & u_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.3 LDLT 分解

对于一个对称矩阵, 其 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ 分解可以进一步表示为 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T$ 的形式, 此分解唯一.

1.4 Cholesky 分解

对于一个对称正定阵 $\boldsymbol{A}$, 其可以分解为一个下三角矩阵和一个上三角矩阵的乘积. 下三角矩阵与上三角矩阵互为转置. Cholesky 分解是 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ 分解的特例. 此分解唯一. 本质为 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T$ 分解中将 $\boldsymbol{D}$ 开根号放入两边.

1.5 满秩分解

一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可分解为一个列满秩矩阵和一个行满秩矩阵的乘积, 此分解不唯一. 分解过程如下:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

1.6 谱分解

一个 n 阶可对角化的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 可以分解为一系列幂等矩阵的加权和: $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A}_i$, 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是幂等矩阵. 也可以使用算子的表示方法, 若线性映射 ϕ 是自伴随映射, 则 $\boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{E}_i$.

1.7 极分解与奇异值分解

关于极分解与奇异值分解的讨论, 可见

(1) 知乎专栏

(2) Linear Algebra Done Right, 7.D.