

# 高等代数 II

## 第 8 次讨论班

2023 年 4 月 26 日

本次讲义为特  $\lambda$ -矩阵相关内容.

**问题 1.** 思考如下问题

- (1) 一个非零矩阵的行列式因子, 不变因子, 初等因子之间的关系;
- (2) 一般的  $\lambda$ -矩阵与方阵的  $\lambda$ -矩阵性质有何不同;
- (3) 确定初等因子组能否确定一般  $\lambda$ -矩阵的等价型, 对于方阵的  $\lambda$ -矩阵呢?
- (4) 矩阵相似与其  $\lambda$ -矩阵的关系;
- (5) 矩阵的特征多项式, 极小多项式在其  $\lambda$ -矩阵中的表示;
- (6) 叙述第一、二有理标准型的构造思路.

**问题 2.** 若实矩阵  $\mathbf{A}$  的初等因子组为  $(\lambda - a)^2, (\lambda^2 + b)^2, b > 0$  的矩阵的第一, 第二有理标准型. 若假设  $\mathbf{A}$  为复矩阵, 求其第一, 第二标准型.

**问题 3.** 证明对于任意方阵  $\mathbf{A}$ , 均有  $\mathbf{A}^T \sim \mathbf{A}$ .

**问题 4.** 设  $\sigma$  是  $n$  维线性空间的幂零线性变换, 特征值 0 的几何重数为  $s$ . 证明  $\sigma^{n-s+1} = 0^*$ .

**问题 5.** 求 Jordan 标准型

- (1) 10 阶幂等矩阵  $\mathbf{A}$  极小多项式为  $x^2$ , 0 的几何重数为 6.
- (2) 10 阶幂等矩阵  $\mathbf{A}$  极小多项式为  $x^3$ , 0 的几何重数为 7.

**问题 6.** 求秩等于 1 的  $n (n \geq 2)$  阶复矩阵  $\mathbf{A}$  的 Jordan 标准型.

**问题 7.** 设  $a$  不等于零, 求下列  $n$  阶上三角矩阵的 Jordan 标准型.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ & a & a & \cdots & a \\ & & a & \cdots & a \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a \end{pmatrix}$$