Linear Algebra II

Supplementaries - 8

ζ

April 26, 2023

1 λ–矩阵初步

Problem 1.1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $(\lambda-1)^n$, 求证: 对任意的正整数 k, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^k$ 相似.

Problem 1.2. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1 或-1, 求证: $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

2 内积空间初步

Problem 2.1. 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ 是内积空间 V 的无关组. 证明必存在 $\boldsymbol{u} \in V$ 使得 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_i) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Problem 2.2. 证明下列线性空间在给定的二元运算下成为内积空间:

(1) 设 $V = \mathbb{R}^n$ 为 n 维实向量空间, $\boldsymbol{G}$ 为正定实对称矩阵, 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 定义 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\beta}$.

(2) 设 $V = \mathbb{C}^n$ 为 n 维复向量空间, $\boldsymbol{H}$ 为正定 Hermite 矩阵, 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 定义 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{H} \bar{\boldsymbol{\beta}}$.

Definition 2.1. 设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ 是欧氏空间 V 中 m 个向量, 矩阵

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) & \ldots & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_m) \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) & \ldots & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_2) & \ldots & (\boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_m) \end{pmatrix}$$

称为向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ 的 Gram 矩阵.

Problem 2.3. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一组基, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 是 n 个实数, 求证: 存在唯一的向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得对任意的 i, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}_i) = c_i$.

Problem 2.4. 设 V 是实数域上全体多项式构成的实线性空间, 设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m,$$

证明如下定义的二元函数为内积:

$$(f,g)=\sum_{i,j}\frac{a_ib_j}{i+j+1}.$$

Problem 2.5. 设 V 是 n 维内积空间, $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\ldots,\boldsymbol{f}_n$ 分别是 V 的两组基, 其 Gram 矩阵分别为 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$, 设从 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\ldots,\boldsymbol{f}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$. 求证: 若 V 为欧氏空间, 则 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}$; 若 V 为酉空间, 则 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{C}}$.

Problem 2.6. 设 V 是 n 维实 (复) 内积空间, $\boldsymbol{H}$ 是一个 n 阶正定实对称矩阵 (正定 Hermite 矩阵), 求证: 必存在 V 上的一组基 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\ldots,\boldsymbol{f}_n$, 使它的 Gram 矩阵就是 $\boldsymbol{H}$.

Problem 2.7. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶半正定实对称且 $r(\boldsymbol{A})=r\le n$, 求证: 必存在 V 上的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 使得其 Gram 矩阵就是 $\boldsymbol{A}$.

Problem 2.8. 证明在 Gram-Schmidt 方法中 Gram 矩阵的行列式值不变, 若 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_m$ 变为正交向量组 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_m$, 有

$$\det\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_m)=\det\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m)=\|\boldsymbol{v}_1\|^2\|\boldsymbol{v}_2\|^2\ldots\|\boldsymbol{v}_m\|^2$$

Problem 2.9. 证明下列不等式:

$$0\le\det\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_m)\le\|\boldsymbol{u}_1\|^2\|\boldsymbol{u}_2\|^2\ldots\|\boldsymbol{u}_m\|^2$$

Problem 2.10. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶实矩阵, 证明下列 Hadamard 不等式:

$$|\boldsymbol{A}|^2\le\prod_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}^2.$$