

高等代数 II

第 7 次讨论班

2023 年 4 月 20 日

本次讲义为特征多项式, λ -矩阵相关内容.

问题 1. 基础知识

- (1) 叙述特征多项式与极小多项式的定义并介绍它们之间的关系,
- (2) 叙述 Cayley-Hamilton 定理,
- (3) 设 \mathbf{A} 为 $n \times n$ 矩阵, 用特征值刻画 $\text{tr}(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{A})$, 以及其矩阵可逆性, 并同样刻画其逆矩阵的相关值.

问题 2. Jordan 标准型中的直接信息: 设矩阵为 Jordan 标准型形式

$$\mathbf{J} = \text{diag}(J(\lambda_1, m_1), \dots, J(\lambda_s, m_s)).$$

为如此分块对角的形式, 其中 λ_i 可相同, 试问如何从中读出以下资料:

- (1) 矩阵的特征值及其代数重数, 几何重数,
- (2) 矩阵的特征多项式, 极小多项式.

问题 3. 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 且 $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 与 \mathbf{A} 的特征多项式互质, 证明 $g(\mathbf{A})$ 可逆.

问题 4. 设 \mathbf{A} 是秩为 r 的幂等矩阵, 证明 \mathbf{A} 相似于 $\text{diag}(\mathbf{I}_r, \mathbf{0}_{n-r})$.

问题 5. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 证明 \mathbf{AB} 与 \mathbf{BA} 的特征多项式相同. 思考 $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 时的结论如何.

问题 6. 回答 λ -矩阵的基础知识, 此时 λ -矩阵取值于 $\mathbb{F}[\lambda]^{m \times n}$:

- (1) λ -矩阵的初等变换的定义,
- (2) Smith 标准型 (即法式) 的定义, 以及其导出过程,
- (3) 介绍 λ 行列式因子, 不变因子, 初等因子 (组) 的定义.
- (4) 给出 λ -矩阵等价的等价条件.

问题 7. 给出 Jordan 块 $J(\lambda, n)$ 的特征矩阵的初等因子组和法式.