高等代数 II

第 5 次讨论班

2023 年 4 月 4 日

本次讲义注重课本知识的理解与应用.

问题 1. 叙述线性空间上线性变换不变子空间的定义, 并证明下列命题

1. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, σ 是 V 的线性变换, 若 W_1, W_2 是 σ 的不变子空间, 证明: $W_1+W_2, W_1\cap W_2$ 也是 σ 的不变子空间.
2. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, σ, τ 是 V 的线性变换, $a\in\mathbb{F}$, 若 W 是 σ, τ 的不变子空间, 证明: W 也是 $a\sigma, \sigma\tau, \sigma+\tau$ 的不变子空间.

问题 2. 假设 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$, 其中 V_i 均为 σ 的不变子空间, 且在 V_i 的基底 $\boldsymbol{u}_{i1},\ldots,\boldsymbol{in_i}$ 下, 有 $\sigma|_{V_i}$ 对应于 $\boldsymbol{A}_i$, $i=1,2,\ldots,s$. 那么, 在 V 的基底

$$\boldsymbol{u}_{11},\ldots,\boldsymbol{u}_{1n_1},\boldsymbol{u}_{21},\ldots,\boldsymbol{u}_{2n_2},\boldsymbol{u}_{s1},\ldots,\boldsymbol{u}_{s1},\ldots,\boldsymbol{u}_{sn_s}$$

下, 有 σ 对应于

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \boldsymbol{0}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}\quad \text{其中 } \boldsymbol{A}_i \text{ 是 } n_i \text{ 阶矩阵.}$$

问题 3. 证明: W 是线性变换 σ 的一维不变子空间当且仅当 W 是由 σ 的一个特征向量张成的子空间.

问题 4. 证明空间为不变子空间

1. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, σ 是 V 上的线性变换, W 是 σ 的不变子空间, $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, 证明: W 是 $f(\sigma)$ 的不变子空间.
2. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, σ 是 V 上的线性变换, $f(x), g(x)\in\mathbb{F}[x]$, 证明: $\ker f(\sigma)$ 与 $f(\sigma)(V)$ 都是 $g(\sigma)$ 的不变子空间.

问题 5. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, σ, τ 都是 V 的线性变换, 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 证明: σ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间是 τ 的不变子空间. (此结论涉及对角化问题, 详情见补充讲义)

问题 6. 叙述循环子空间分解的内容与思路.

问题 7. 证明: Jordan 型矩阵 $\boldsymbol{J}$ 中以 λ 为对角元的 k 阶 Jordan 块的个数为

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}+\operatorname{rank}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{I})^{k+1}-2\operatorname{rank}(\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{I})^{k}$$

问题 8. 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间, σ 是 V 的线性变换, W 是 σ 的非零不变子空间. 证明: W 不能分解成两个非零不变子空间的直和当且仅当 W 为 σ 的不变子空间.