高等代数II

第4次 讨 论 班

2023 年 3 月 4 日

问题 1. 试计算下列矩阵的极小多项式:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

问题 2. 证明下列结论:

1. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的极小多项式相等.
2. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 相似. 证明: $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的极小多项式相等.
   后者启发我们可以将极小多项式看作线性变换层次的性质.

问题 3. 根据题目要求举例:

1. 举例: $\mathbb{F}$ 上的两个三阶矩阵, 他们极小多项式相等, 但不相似.
2. 举例: 矩阵的极小多项式未必是既约多项式.

问题 4. 我们将通过此题目, 解释极小多项式, 特征值等一系列量之间的关系. 我们考虑矩阵乘法诱导的线性变换 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}^n$.

1. 证明: λ 为线性变换 $\boldsymbol{T}$ 的特征值当且仅当 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_n)=0$.
2. 设 $\mu(x)$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的极小多项式, 证明 λ 是 $\mu(x)$ 的根当且仅当 λ 是 $\boldsymbol{T}$ 的特征值.
3. 我们称 $f(x)=\det(\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I}_n)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ (或对应的线性变换) 的**特征多项式**. 由上述两条得到, 特征多项式的根集等于极小多项式的根集合, 同为所有特征值 (特征根).

注: 在考虑变换时称为特征值, 考虑多项式求解时称为特征根. 由后续的知识, 我们可以得到 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, 即任何矩阵适合其特征多项式. (Cayley – Hamiltion 定理), 因此我们可以得到 $\mu(x)\mid f(x)$.

定义 1. 若 λ 为特征多项式 $f(x)$ 的根, 则称特征多项式 $f(x)$ 中因子 $(x-\lambda)$ 出现的最高幂次为 λ 的**代数重数**.

定义 2. 为记号简便, 我们记矩阵 $J(a,n)=\begin{pmatrix}a&1&0&\dots&0\\0&a&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots\\0&0&\dots&a&1\\0&0&0&\dots&a\end{pmatrix}_{n\times n}$.

问题 5. 求下列矩阵的极小多项式与特征多项式, 以及所有特征根及其几何重数, 代数重数.

1. $J(a, n)$,
2. $\mathrm{diag}(J(\lambda_1, n_{1,1}), J(\lambda_1, n_{1,2}), \ldots, J(\lambda_1, n_{1,k_1}), J(\lambda_2, n_{2,1}), \ldots, J(\lambda_m, n_{m,k_m}))$, 即

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1, n_{1,1}) & & & & & & \\ & J(\lambda_1, n_{1,2}) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & J(\lambda_1, n_{1,k_1}) & & & \\ & & & & J(\lambda_2, n_{2,1}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J(\lambda_m, n_{m,k_m}) \end{pmatrix}$$

其中 λ_i, $1 \leq i \leq m$ 互不相同, 每个 λ_i 对应着 k_i 个块, 阶数分别为 $n_{i,1}, n_{i,2}, \ldots, n_{i,k_i}$. 且对于任意 $1 \leq i \leq m$, $n_{i,1} \leq \cdots \leq n_{i,k_i}$.

问题 6. 特征值与对角化问题

1. 讲述线性变换可对角化的几个等价条件, 并证明.
2. 设 σ 是幂等变换, 证明 σ 可对角化.
3. 设 λ_0 是线性变换 σ 的特征值, 设 $f \in \mathbb{F}[x]$, 则有 $f(\lambda_0)$ 是 $f(\sigma)$ 的特征值.