

Linear Algebra II

Supplementaries - 4

ζ

March 4, 2023

1 特征值理论

Problem 1.1. 同基础讲义第五题.

2 泛性质

2.1 商结构

设 W 为 V 的子空间, U 为线性空间. 则对于线性映射任意 $f: V \rightarrow U$, 若有 $f(W) = \theta$, 即 $W \subseteq \ker f$, 则存在唯一的线性映射 \tilde{f} , 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p} & V/W \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & U \end{array}$$

2.2 直积与直和

在线性代数中, 我们遇到直和一般是指子空间的直和, 直积则为 "用小的线性空间构造更大的空间". 实际上, 对于一般的一族线性空间, 我们都有直积与直和的概念.

在范畴论中, 直积与直和分别对应着 limit (inverse limit), colimit (direct limit), 具有两类不同的泛性质, 分别对应着 terminal 与 initial 元素.

Definition 2.1 (直积). 设 $V_i, i \in I$ 为一族 \mathbb{F} 上的线性空间, 其中 I 为指标集. 则 $V_i, i \in I$ 的直积定义为

$$\prod_{i \in I} V_i = \{v \mid v = (v_i)_i, v_i \in V_i, i \in I\}$$

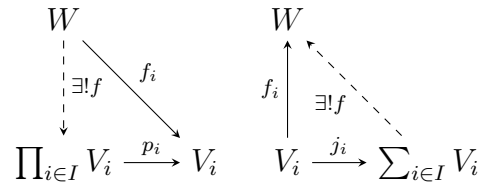
其加法与数乘与欧式空间类似, 可以将 i 视为指标 i 的坐标.

Definition 2.2 (直和). 设 $V_i, i \in I$ 为一族 \mathbb{F} 上的线性空间, 其中 I 为指标集. 则 $V_i, i \in I$ 的直和定义为

$$\sum_{i \in I} V_i = \{v \mid v = (v_i)_i, v_i \in V_i, i \in I, \text{其中坐标仅有有限项非零}\}$$

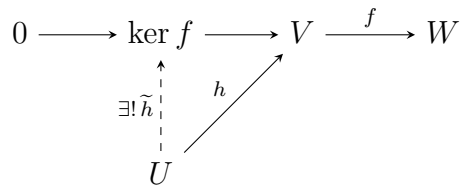
其加法与数乘与欧式空间类似, 可以将 i 视为指标 i 的坐标.

其本质来源于如下两则泛性质.

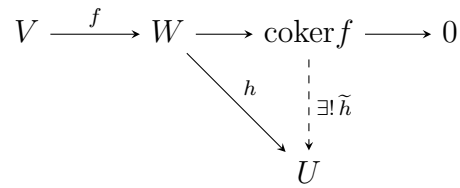


2.3 Ker 与 Coker

对于 $f \circ h = 0$



对于 $h \circ f = 0$



2.4 Pullback 与 Pushout

