Linear Algebra II

Supplementaries - 4

ζ

March 4, 2023

1 特征值理论

Problem 1.1. 同基础讲义第五题.

2 泛性质

2.1 商结构

设 W 为 V 的子空间, U 为线性空间. 则对于线性映射任意 $f : V \to U$, 若有 $f(W) = \theta$, 即 $W \subseteq \ker f$, 则存在唯一的线性映射 $\widetilde{f}$, 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & V/W \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

2.2 直积与直和

在线性代数中, 我们遇到直和一般是指子空间的直和, 直积则为 ”用小的线性空间构造更大的空间”. 实际上, 对于一般的一族线性空间, 我们都有直积与直和的概念.

在范畴论中, 直积与直和分别对应着 limit (inverse limit), colimit (direct limit), 具有两类不同的泛性质, 分别对应着 terminal 与 initial 元素.

Definition 2.1 (直积)**.** 设 V_i, $i \in I$ 为一族 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 其中 I 为指标集. 则 V_i, $i \in I$ 的直积定义为

$$\prod_{i \in I} V_i = \{v \mid v = (v_i)_i,\ v_i \in V_i,\ i \in I\}$$

其加法与数乘与欧式空间类似, 可以将 i 视为指标 i 的坐标.

Definition 2.2 (直和)**.** 设 V_i, $i \in I$ 为一族 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 其中 I 为指标集. 则 V_i, $i \in I$ 的直和定义为

$$\sum_{i \in I} V_i = \{v \mid v = (v_i)_i,\ v_i \in V_i,\ i \in I, \text{其中坐标仅有有限项非零}\}$$

其加法与数乘与欧式空间类似, 可以将 i 视为指标 i 的坐标.

其本质来源于如下两则泛性质.

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\prod_{i\in I} V_i \arrow[r, "p_i"] & V_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W & \\
V_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[r, "j_i"] & \sum_{i\in I} V_i \arrow[ul, dashed, "\exists! f"']
\end{tikzcd}
$$

2.3 Ker 与 Coker

对于 $f \circ h = 0$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & V \arrow[r, "f"] & W \\
 & U \arrow[u, dashed, "\exists! \widetilde{h}"] \arrow[ur, "h"] & &
\end{tikzcd}
$$

对于 $h \circ f = 0$

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \arrow[r] \arrow[dr, "h"] & \operatorname{coker} f \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists! \widetilde{h}"] & 0 \\
 & & U &
\end{tikzcd}
$$

2.4 Pullback 与 Pushout

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, dashed, "\exists! \widetilde{g}"] \arrow[d, dashed, "\exists! \widetilde{f}"] & W \arrow[d, "f"] \\
U \arrow[r, "g"] & V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, dashed, "\exists! \widetilde{g}"'] \\
U \arrow[r, dashed, "\exists! \widetilde{f}"'] & P
\end{tikzcd}
$$