Linear Algebra II

Supplementaries - 3

ζ

March 3, 2023

1 线性映射拾遗 II

Problem 1.1. *设 $f: V \to W$ 为 n 维欧氏空间之间的线性映射, 证明下列条件等价:*

1. *f 为线性空间之间的同构.*
2. *f 为单射.*
3. *f 为满射.*

Problem 1.2. *设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵, 定义 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换 $\mathbf{T}$ 为: $\mathbf{T}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AXB}$. 求解何时此线性变换为线性同构.*

下面一个问题虽然出现频率较低, 但颇为有趣便选至此. 首先我们回忆上学期讲义中出现过的矩阵张量积的定义: 设 $A = (a_{ij})_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n}$ 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $k \times l$ 矩阵. 则定义矩阵的张量积为 $mk \times nl$ 矩阵：

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Problem 1.3. *设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵, 定义 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换 $\mathbf{T}$ 为: $\mathbf{T}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX}$. 证明: 在基础矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为基底下线性变换的表示矩阵为 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}_n$*

2 同调代数初步

同调代数是一个很大的话题, 限于知识我们仅能介绍其一小部分. 为了便于理解, 我们将限制在线性空间上讨论这一部分话题, 其内容较课本内容是新颖有趣的, 所使用的方法也是当代研究的主流之一.

2.1 链复形与同调

在代数中, 我们称下面的一个结构 $V = (V_i, d_i)_i$ 为一个链复形(chain complex). 其中所有的 V_i 为线性空间, d_i 为线性映射, 满足 $d_{i+1} \circ d_i = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$, 即 $\mathrm{Im} d_i \subseteq \ker d_{i+1} \subseteq V_i, \forall i \in \mathbb{Z}$.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-3}} V_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} V_n \xrightarrow{d_n} V_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} V_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} \cdots$$

由条件, 我们可以获得任意位置的一个商空间 $\ker d_{n+1}/\operatorname{Im} d_n$, 记为 $\mathrm{H}^n(V)$, 称为该链复形的第 n 个**上同调(cohomology)** (线性空间). (下)同调(homology)($\mathrm{H}_n(V)$)的定义则是将链复形的顺序颠倒为由大到小, 因此一般这两个概念是等价的. 但是在习惯上, 我们对于空间的同调或上同调有特定的取法, 进而导致其有不同性质.

2.2 正合列

我们仍仅在线性空间上考虑.

正合序列(exact sequence)定义在链复形上, 仍设链复形如上, 若在某处 n, 有 $\ker d_{n+1} = \operatorname{Im} d_n$, 我们称链复形在 n 处正合(exact). 若链复形处处正合, 则我们称链复形为正合序列.

Definition 2.1 (短正合序列)**.** 若正合序列仅有如下的有限项, 我们称其为短正合序列(short exact sequence).

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

为了瞥清定义的含义, 我们将此翻译为映射语言, 读者自证不难.

Problem 2.1. 证明*:*

(i) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ 在 A 处正合当且仅当 f 为单射.

(ii) $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 在 C 处正合当且仅当 g 为满射.

(iii) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 在 B 处正合当且仅当 $\operatorname{Im} f = \ker g$.

由于链复形在每个分量上都是一个线性空间, 我们可以取多个链复形, 逐分量地作线性映射, 并保证其与链复形的映射相匹配, 这便引出了**交换图**和**链复形的正合序列**的概念.

Definition 2.2. 设 U, V 为链复形, 即 $U = (U_n, d_n)_n$, $V = (V_n, d_n)_n$ (为符号简洁不修改 d_n, 读者需明确不同链复形中的 d_n 含义不同), 链复形之间的映射 $f : U \to V$ 指一系列的线性映射 $f = (f_n)_n$, $f_n : U_n \to V_n$, 使得下图交换.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & U_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & U_n & \xrightarrow{d_n} & U_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & V_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & V_n & \xrightarrow{d_n} & V_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & \cdots
\end{array}$$

Definition 2.3. 设 U, V, W 为三个链复形, 即 $U = (U_n, d_n)_n$, $V = (V_n, d_n)_n$, $W = (W_n, d_n)_n$ (为符号简洁不修改 d_n, 读者需明确不同链复形中的 d_n 含义不同), 链复形之间的映射 $f : U \to V, g : V \to W$ 正合指下列交换图成立

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & U_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & U_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & U_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & V_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "g_{n-1}"] & V_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] & V_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & W_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d] & W_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d] & W_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

2.3 追图法

这部分我们引用其它讲义, 仅需将模替代为线性空间(其实是画交换图太费事了), 网页链接 **追图法.pdf**, 若阅读不方便, 此文档的 pdf 版也将发出至讨论群.

重要的追图内容包括:

1. Five Lemma 五项引理.
2. Short exact sequence of chain complexes induces long exact sequence of cohomologies. 链复形的短正合序列导出上同调的长正合序列.
3. Snake Lemma 蛇形引理.
4. 3×3 引理, 以及一系列 3×3 图内的结论.
5. 其它一系列结论...