高等代数II

第2次讨论班

2023 年 3 月 1 日

问题 1. 设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_s}$线性相关, 而 $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_s}$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{u}$ 可由 $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_s}$ 线性表示.

问题 2. 证明如下结论

1. s 个线性无关的向量不能由少于 s 个向量线性表示.
2. 设 S,T 均为 V 的子空间, 证明 $S+T$ 是直和当且仅当对于 S 中的任意一个无关组与 T 中的任意一个无关组之并组是一个无关组.

问题 3. 设向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ 线性无关

1. 若 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ 可由 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ 线性表示, 说明何时 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ 线性无关, 并简述证明.
2. 若 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ 可由 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ 线性表示 $(m<n)$, 说明何时 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ 线性无关, 并简述证明.
3. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, $\boldsymbol{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{u}_i$. 试给出使得 $\boldsymbol{u}_1 + a_1\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_2 + a_2\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_n + a_n\boldsymbol{u}$, 线性无关的充分必要条件.

问题 4. 设 $C(\mathbb{R})$ 是实数域上连续函数全体构成的实线性空间. 求证: 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\ldots$, $\sin nx$, $\cos nx$ 在 $\mathbb{R}$ 线性无关. 并沿此思路，给出无穷维线性空间的例子.

注意：无穷维线性空间中的无穷子集的线性无关性也是取任意有限项皆线性无关.

问题 5. 对于向量空间 V 的有限维子空间 $S_1, S_2, \ldots, S_t$, 证明下列条件等价:

1. $S_1 + S_2 + \cdots + S_t$ 是直和;
2. S_i 各取一基底放在一起即为 $S_1 + S_2 + \cdots + S_t$的基底, $i = 1, 2, \ldots, t$.
3. $\dim(S_1 + S_2 + \cdots + S_t) = \dim S_1 + \dim S_2 + \cdots + \dim S_t$.

问题 6. 求下列线性空间 V 的维数:

1. V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶上三角矩阵全体组成的线性空间
2. V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶对称矩阵全体组成的线性空间
3. V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶反对称矩阵全体组成的线性空间

问题 7. 设 U 和 V 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维向量空间, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ 与 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 分别为 U 和 V 的基底. σ 是 U 到 V 的线性映射，使得 $\sigma(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$. 证明: σ 是同构.

在线性代数中, 应当是先定义线性映射的概念, 再说明同构的概念. 在以后的抽象代数结构中, 都为先定义结构之间的映射, 再去定义同构的概念.

问题 8. 我们给出无穷维线性空间的非平凡同构的例子. 设 $C(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的全体连续函数线性空间, 定义变换:

$$\tau : f(x) \longmapsto g(x) = f(x-1).$$

请证明该变换为线性同构.

问题 9. 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ 是数域 $\mathbb{F}$上 n 维线性空间 V 中选定的 m 个向量且已知它们的秩等于 r. 求证: 全体适合 $x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{u}_m = \mathbf{0}$ 的列向量 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, $(x_i \in \mathbb{F})$ 构成数域 $\mathbb{F}$ 上 m 维列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 的 $m-r$ 维子空间.