Linear Algebra II

Supplementaries - 2

ζ

March 3, 2023

1 线性映射拾遗

Problem 1.1. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的幂等变换, 则 $V = U \oplus W$, 其中 $U = \operatorname{Im}\varphi$, $W = \ker\varphi$, 且 φ 就是 V 到 U 上的投影变换.

Problem 1.2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶幂等矩阵, 求证:

1. 存在 n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 其中 $r = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.
2. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

Problem 1.3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 求证: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^n) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+1}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+2}) = \dots$.

Problem 1.4. 设 U 是有限维线性空间 V 的子空间, φ 是 V 上的线性变换, 求证:

$$\dim U - \dim\ker\varphi \le \dim\varphi(U) \le \dim U,$$
$$\dim\varphi^{-1}(U) \le \dim U + \dim\ker\varphi.$$

Problem 1.5. 利用上题, 证明: 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上两个 n 阶方阵, 则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) - n \le \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \le \min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}.$$

2 同构定理

一般的同构定理是在群, 环, 模上得到, 由于线性空间是特殊的模, 也是最简单的一类代数结构, 我们在此给出其同构定理. 此部分需要对商空间有较好的理解, 我们已经初步介绍了其概念, 不熟悉的同学可以自行查阅.

类似的同构定理条件上, 子群, 环上需要特殊的定义, 即分别为正规子群, 环的理想, 以保证商结构仍为群环. 而形式上, 同构定理是完全一致的.

2.1 第一同构定理

设 $f: V \longrightarrow W$ 为满线性映射. 则有如下线性空间的同构:

$$V/\ker f \cong W.$$

2.2 第二同构定理

设 W, U 为 V 的子空间, 则 $W \cap U$ 为 W 的子空间, 我们有:

$$W/(W \cap U) \cong (W+U)/U.$$

2.3 第三同构定理

设线性空间 $U \subseteq W \subseteq V$ 为子空间链. 则有:

$$V/W \cong (V/U)/(W/U).$$

这里 W/U 视作 V/U 的子空间.