高等代数II

第1次讨论班

2023 年 3 月 1 日

问题 1. 叙述向量空间（线性空间）的定义

注意只要满足8条性质，便可称为向量空间(线性空间); 也正因如此，向量空间里的一些结论需要由定义重新推导. 这是我们遇到的第一个抽象定义的空间，在证明中需要抛开以往的具体例子.

前四条性质为加法性质, 后四条为数乘（也可视为集合作用, 课本P116）性质. 前四条保证了加法Abel群，后四条为一个域的作用，更一般的概念是环R上的模.

关于八条性质的独立性: 严格来讲不能算公理体系, 有一条非必须, 详情可见 **问题链接**

问题 2. 证明向量空间中的若干性质.

1. 零向量唯一, 每个向量的负向量唯一.
2. 向量空间加法满足消去律.
3. $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\theta}$, $a\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$.
4. $(-a)\boldsymbol{u} = a(-\boldsymbol{u}) = -(a\boldsymbol{u})$.
   注意 $-\boldsymbol{u}$ 是一个记号, 代表$\boldsymbol{u}$的负元

问题 3. 向量空间实例, 验证空间为向量空间 (选几例)

1. 域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维欧式空.间 $\mathbb{F}^n$, 加法与数乘皆为逐分量的, 即 $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$, $k(a_i) = (ka_i), k \in \mathbb{F}$
2. $\mathbb{R}$ 上的 $C[0, 1]$, 即 $[0, 1]$ 闭区间上的所有实值连续函数, 函数加法与数乘皆为常规定义.
3. 域 $\mathbb{F}$ 上的多项式 $\mathbb{F}[x]$ 空间, 多项式加法与数乘皆为常规定义.
4. 域 $\mathbb{F}$ 上的映射集 $\mathbb{F}^X$, 其中X为非空集合. $\mathbb{F}^X$ 意为所有 X 到 F集合意义上的映射, 加法与数乘皆为逐点定义.
5. 实数$\mathbb{R}$是有理数$\mathbb{Q}$上的向量空间.

问题 4. 回答下列问题

1. 叙述向量空间子空间的定义.
2. 证明: $C[0, 1]$ 是 $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (符号定义如上)的子空间.
3. 证明: $\mathbb{F}$ 上 n 阶对称矩阵与反对称矩阵均为 $\mathbb{F}^{n\times n}$的子空间.
4. 证明: $\mathbb{F}$ 上 n 阶纯量矩阵和迹零矩阵均为 $\mathbb{F}^{n\times n}$的子空间.

问题 5. 回答下列问题

1. 请叙述子空间交、和运算的定义
2. 叙述两个子空间直和的定义并给出其等价条件
3. 叙述多个(有限个)子空间直和的定义并给出其等价条件

4. 我们推广多个空间和的定义, 设 $V_i,\, i \in I$ 为 V 的子空间, 定义

$$\sum_{i\in I} V_i = \left\{ v \mid v = \sum_{i\in I} v_i,\, v_i \in V_i, \text{表达式中仅有有限个}v_i\text{非零} \right\}.$$

   证明 $\sum\limits_{i\in I} V_i$ 为子空间.

我们对于子空间的运算，目的是得到新的子空间，因此某些**集合运算**不满足该原则便被摒弃. 如果不限于得到子空间, 我们可以由线性空间得到新的线性空间, 可以实现的操作有笛卡尔积、张量积、对偶空间等等.

问题 6. 证明: 一个向量空间不能分解成有限个真子空间的并

问题 7. 证明如下结论

1. $\mathbb{F}$ 上 n 阶对称矩阵与反对称矩阵构成 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的直和分解.
2. $\mathbb{F}$ 上 n 阶纯量矩阵和迹零矩阵构成 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的直和分解.
3. $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 为 $\mathbb{R}$ 上所有的实值函数的向量空间, 令V_o, V_e 分别表示奇函数与偶函数的集合, 证明其均为V的子空间且 $V = V_o \oplus V_e$.