Linear Algebra II

Supplementaries - 1

ζ

March 2, 2023

1 线性空间与线性映射

1.1 线性空间入门

除去基础讲义中涉及的空间, 我们列举一些其它并非显然的线性空间.

Problem 1.1. 证明下面的空间为线性空间.

1. V 是正实数全体 $\mathbb{R}^+$, 加法 $\oplus$ 定义为 $a \oplus b = ab$, 数乘 $\circ$ 定义为 $k \circ a = a^k$, 其中等式右边分别是数的乘法和乘方.
2. V 为实数对全体 $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, 加法 $\oplus$ 定义为 $(a_1,b_1) \oplus (a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2+a_1a_2)$, 数乘 $\circ$ 定义为 $k \circ (a,b) = (ka, kb + \frac{k(k-1)}{2}a^2)$.

Problem 1.2. 设 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \left\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\right\}$, 其中 a,b,c 均是有理数, 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 是有理数域上的线性空间并求其维数.

Problem 1.3. 设 $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3$ 是数域且 $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \mathbb{K}_3$, $\mathbb{K}_2$ 作为 $\mathbb{K}_1$ 上的线性空间维数为 m, $\mathbb{K}_3$ 作为 $\mathbb{K}_2$ 上的线性空间维数为 n, 求证: 如将 $\mathbb{K}_3$ 看成 $\mathbb{K}_1$ 上的线性空间, 则其维数为 mn.

1.2 线性映射

Problem 1.4. 设 φ 是 $\mathbb{F}$ 上有限维线性空间 V 到 U 的线性映射. 求证: 必存在 U 到 V 的线性映射 ϕ, 使 $\varphi\phi\varphi = \varphi$.

Problem 1.5. 设 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 $n+1$ 个不同的数. V 是 $\mathbb{F}$ 上次数不超过 n 的多项式组成的线性空间. 又设 φ 是 V 到 $n+1$ 维行向量空间 U 的映射:

$$\varphi(f) = (f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n)),$$

求证: φ 是线性同构.

Problem 1.6. 由上例, 推出 *Lagrange* 插值定理.

1.3 构造新的线性空间

笛卡尔积

设 V, W 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 定义线性空间的笛卡尔积为 $V \times W$. 其定义为

$$\begin{aligned}
&V \times W = \{(v,w) \mid (v,w) \in V \times_{cartesian} W\} \\
&(v,w) + (v',w') = (v+v', w+w') \\
&k(v,w) = (kv, kw).
\end{aligned}$$

对偶空间

设 V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 定义线性空间的对偶空间为

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$$

我们可以再定义双对偶即 $V^{**} = (V^*)^*$, 由线性代数理论可知, 有限维线性空间与其双对偶间有自然同构.

张量积

设 V, W 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 定义线性空间的张量为 $V \otimes W$. 其定义有几种不同等价形式, 我们将在讨论课内详细讲述.

商空间

设 V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, W 为 V 的子空间, 则可以做商空间 V/W, 其定义我们已经在上学期的讲义中提及, 在此不再赘述.

2 范畴论初步

$$\begin{tikzcd}
 & \ker a \arrow[r] \arrow[d] & \ker b \arrow[r] \arrow[d] & \ker c \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & \mathrm{coker} a \arrow[r] & \mathrm{coker} b \arrow[r] & \mathrm{coker} c &
\end{tikzcd}$$

2.1 范畴与态射

Definition 2.1. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 指以下资料:

1. 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 其元素称为 $\mathcal{C}$ 的**对象**.

2. 集合 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, 其元素称作 $\mathcal{C}$ 的态射, 配上一对映射 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 其中 s 和 t 分别给出态射的**来源**和**目标**. 对于 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 一般习惯记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) := s^{-1}(X) \cap t^{-1}(Y)$ 或简记为 $\mathrm{Hom}(X, Y)$, 称为 $\mathrm{Hom}-$ 集, 其元素称为从 X 到 Y 的态射.

3. 对每个对象 X 给定元素 $id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, 称为 X 到自身的**恒等态射**.

4. 对于任意 $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 给定态射间的**合成映射**

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \tag{1}$$

$$(f, g) \longmapsto f \circ g. \tag{2}$$

$f \circ g$ 简记为 fg. 满足

(i) 结合律: 对于任意态射 $h, g, f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, 若合成 $f(gh)$ 和 $(fg)h$ 都有定义, 则

$$f(gh) = (fg)h.$$

故两边可以同写为 $f \circ g \circ h$ 或 fgh;

(ii) 对于任意态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 有

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ f.$$