集合论及其在基础数学中的应用

10190615 田泽禹

目录

对无穷的研究, 是数学理论在进步与完善中自然的需求. 集合论的研究工作开始于十九世纪的末期, 由Cantor首先进行的. 这一崭新的学科经过艰难困苦逐渐形成, 发展壮大, 至今已经成为数学大厦的重要基石之一. 本文将简单复习集合论中的基础内容, 并从集合论理论的应用, 集合论作为应用对象两方面进行介绍, 进而说明集合论在现代数学中的重要地位.

1 基础知识复习

1.1 基数

任意两个集合 A, B 间若存在元素间的一一对应, 则称 A 与 B 等势.

定义 1.1 (**基数**)**.** *定义所有与集合 A 等势的集合所做成的集合叫做集合 A 的基数, 记为$\bar{\bar{A}}$.*

记自然数集合的基数为 d 或 $\aleph_0$, 集合 $(0,1]$ 的基数叫做连续统, 记为 c. 集合的基数一般用小写字母表示. 若 A 的基数 a 与基数 b 的 B 的某个子集等势, 则记 $a \leq b$.

定理 1.2 (Bernstein)**.** *若 $a \leq b$, $b \leq a$, 则 $a = b$.*

若 $a \leq b$ 且 $a \neq b$, 则记为 $a < b$.

定理 1.3 (Cantor)**.** *对于任何集合 A, 其幂集合的基数恒大于 A的基数, 即 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}}$.*

定义 1.4 (基数的运算)**.** *定义基数的加法, 乘法, 乘方运算为 $\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}} := \overline{\overline{A \sqcup B}}$. $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} := \overline{\overline{A \times B}}$. $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} := \overline{\overline{A^B}}$.*

则有加法与乘法的交换律, 结合律, 分配律. 指数运算的定律与实数情况的形式相同.

此外, 我们给出一些常用集合的基数:

例 1.5. *我们给出自然基数与连续统的一些例子:*
任何的区间, *左右开闭均可: $\overline{\overline{(a,b)}} = c$, $(b > a)$.*
实数复数集合*: $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{C}}} = c$.*
有理数集*: $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = d$.*
部分运算*: $\overline{\overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}} = d$. $\overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}} = c$.*

1.2 序集、序型、序数

定义 1.6 (偏序集)**.** *设 S 是任意一个集合, 如果 S 的元素之间存在一个关系 "$\leq$", 具有性质:*

1. 反身性: $\forall x \in S$, $x \leq x$.

2. 传递性: $x \leq y$, $y \leq z$, 则 $x \leq z$.

3. 反对称性: $x \leq y$, $y \leq x$, 则 $x = y$.

则称S是一个**偏序集**.

现设S与S'是两个偏序集, 如果有S到S'的一个双射f, 使得f具有性质

$$x \leq y \text{当且仅当} f(x) \leq f(y)$$

则称S相似于S', 记为$S \sim S'$, f 称为保序映射. 相似关系是一个等价关系. 如果任意两个元素之间都有偏序关系, 则此时偏序集成为全序集, 简称序集.

定义 1.7 (序型)**.** *每一个序集都可以用一个唯一确定的符号与之对应, 且使得两个序型相似当且仅当其序型相同. 本质上是对于相似关系的等价性作商. 序集 M 的序型记为 $\overline{M}$. 一般用希腊字母表示序型, 如 $\overline{\mathbb{N}} = \omega$*

定义 1.8 (序型的加法)**.** *设 $\overline{A} = \sigma$, $\overline{B} = \tau$, 则定义 $A \sqcup B$ 上的序关系:*

1. *若 $x, y \in A$, 则 $x \leq y$ 继承 A 中的偏序.*

2. *若 $x, y \in B$, 则 $x \leq y$ 继承 B 中的偏序.*

3. *若 $x \in A$, $y \in B$ 则约定 $x \leq y$.*

定义 1.9 (序型的乘法)**.** *设 $\overline{A} = \sigma$, $\overline{B} = \tau$, (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in A \times B$, 则定义 $A \times B$ 上的序关系:*

1. *若 $x_1 < x_2$ 则 $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$,*

2. *若 $x_1 = x_2$, $y_1 < y_2$, 则 $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$,*

3. *若 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, 则 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.*

序型的加法与乘法满足结合律, 加法与乘法满足第一分配率 $\sigma(\tau + \rho) = \sigma\tau + \sigma\rho$.

序型的基数: 如果序型 $\sigma = \overline{M}$, 则集合 M 的基数 $\overline{\overline{M}}$ 称为 σ 的基数.

基数的型集: 设 a 为一基数, 所有的具有基数 a 的序型所做成的集合叫做 a 的型集. 记为 $T(a)$.[1]

而介绍完序集以及序数后, 我们给出一类特殊的序集, 其结构具有良好的性质.

定义 1.10 (整序集)**.** *如果一个序集的任意非空子集作为子序集恒有极小元素, 则此序集就叫做一个整序集(或良序集).*

定理 1.11 (**整序集基本定理**). 任意两个不相似的整序集, 必有一个相似于另一个的真前段.

定义 1.12 (**序数**). 整序集的序型称为序数, 无穷整序集的序型称为**超穷序数**, **有限序数**则为 $0, 1, 2, \ldots$

定理 1.13. 若干个序数做成的集合恒自然地构成整序集. 且小于一个给定序数 σ 的一切序数构成的整序集 $S(\sigma)$ 的序数恰为 σ. 即 $\overline{S(\sigma)} = \sigma$

极限数与非极限数: 当序数 σ 没有左邻, 即没有序数 τ 使得 $\sigma = \tau + 1$时, 便称 σ 为一个极限序数, 否则称为非极限序数, 也可以称为后继序数.

2 基数与Baire纲

2.1 基数的应用

2.1.1 连续函数的数量

在数学分析中, 我们会学习极限、连续等概念, 然后在闭区间上考察基本的连续函数性质. 我们熟知的函数都是连续函数, 也很容易能够构造出非连续函数的例子, 那么我们思考, 连续函数在闭区间内所有的函数所占的比重是如何的? 为了便于讨论, 不妨设所讨论区间为 $[0, 1]$.

首先考虑$[0, 1]$上所有的函数的基数, 由于一个函数由且仅由其定义域上的每个点的取值决定, 因此$[0, 1]$上所有的实值函数的基数等于

$$\overline{\overline{R^{[0,1]}}} = c^c = (2^d)^c = 2^{(d \cdot c)} = 2^c.$$

再考虑连续函数的基数, 因为连续函数的连续性, 则其任意一点的函数值可由其邻域内的函数值逼近而唯一确定, 则知连续函数的基数最多为:

$$\overline{\overline{R^{[0,1]\cap\mathbb{Q}}}} = c^d = (2^d)^d = 2^d = c.$$

最少为:

$$\overline{\overline{\{f(x) \coloneqq a \mid a \in \mathbb{R},\ x \in [0, 1]\}}} = c.$$

则知闭区间函数的基数大于连续函数的基数, 其基数值为后者幂集的基数. 当然, 此处的区间不能为 $[a, a]$ 这种形式, 否则两者的基数都相同, 为 c.

2.1.2 Lindelof空间的积空间不一定为Lindelof

在拓扑学中, C_1, C_2, T_2, T_3 空间对于子空间和积空间都有传递性质. 但某些性质是不具有传递性质的, 这个结论说明了虽然 C_2 能够推出 Lindelof 性质, 但 Lindelof 本身并非传递的.[5]

证明. 考虑 Sorgenfrey 平面 $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$, 则其为实数下限拓扑 Sorgenfrey 直线的积空间.

考虑斜对角线

$$L = \{x \times (-x) | x \in \mathbb{R}_l\}$$

及其上一个形如以下的覆盖

$$[a, b) \times [-a, d)$$

则知由于斜对角线上每个元素都要被覆盖, 而斜对角线的基数为 c, 不是可数基数 d. 而由 Lindelof 空间是闭遗传的, 斜对角线为闭集, 知 Sorgenfrey 平面非 Lindelof 空间. □

2.2 Baire纲定理

Baire纲定理的内容并非集合论的内容, 但其分类思路与集合论的基数具有很类似的特征, 因此在此简单提出相关的知识.[2]

定义 2.1. *设X是距离空间, $S \in X$, 如果闭包$\bar{S}$的内部是空集, 则称S是***无处稠密***的.*

最典型的无处稠密的集合为Cantor三分集. 无处稠密集的补集是处处稠密的.

定义 2.2. *在距离空间 X 中, 若 $E = \cup_{n=1}^{\infty}$, 而每个 S_n 都是 X 中的无处稠密的, 则称点集 E 是第一纲的, 非第一纲点集称为第二纲的.*

定理 2.3 (Baire纲定理)**.** *完备的距离空间本身必是第二纲的.*

我们通过一个相似的案例来说明Baire纲定理的强大之处.

例 2.4. *在 $I = [0, 1]$ 上存在处处连续但处处不可微的函数.*

在无穷范数的意义下, 不妨设 I 上所有的连续函数构成的赋范线性空间为 E, 则由数学分析中闭区间内一致收敛的性质, 知 E 为完备的赋范空间. 令

$$N_n = \left\{ f \in E \mid \exists x_0 \in I,\ s.t\ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \leq n, \forall h > 0 \right\}.$$

则容易验证 N_n 为闭集, 且无处稠密. 因此 $\cup_{n=1}^{\infty} N_n$ 是第一纲集. 而若 f 为有一点可微处的函数, 则必属于这一集合. 因此知比存在一个函数 $\phi \in E$, 且 $\phi \notin \cup_{n=1}^{\infty}$. 即处处连续且处处不可微.

3 三大公理互证

我们此前并未介绍集合论中最基本的三大公理, 即选择公理、良序定理、Zorn引理, 一般我们将选择公理定为公理, 并由此推出其它的结论. 本质上, 这三者是互相等价的, 都可以选择为公理进行推理. 我们先给出三者的命题.

公理 3.1 (选择公理)**.** *对于任何的集族, 都存在选择函数. 即对于任意集族 X, 有*

$$\forall X\ \left[\emptyset \notin X \implies \exists f : X \to \cup X \quad \forall A \in X,\ f(A) \in A\right].$$

定理 3.2 (良序定理)**.** *任意一个集合都可以重新赋予全序关系, 使之成为一个序集.*

定理 3.3 (Zorn 引理)**.** *在任何一非空的偏序集中, 若任何链(全序子集)都有上界, 则此偏序集内必存在极大元.*

选择公理证明Zorn引理

设偏序集为 X, 假设Zorn引理不成立, 则存在一个选择函数 g, 对于任意一个全序子集 A, $g(A)$ 为其严格上界 $g(A) \in X \backslash A$. Zorn引理不成立体现在"严格"上. 定义

$$A_{<a} = \{x \in A : x < a\}.$$

同时称一个子集 $A \subset X$ 为"好集", 是指其满足以下条件:

- A 是全序集.
- A 中不含有严格下降的列.
- $\forall a \in A$, $g(A_{<a}) = a$.

观察到这样的"好集"是存在的, 如取 $\{g(\emptyset)\}$, 且如果 A 是"好集", 则有 $A \cup g(A)$ 是"好集".

下面我们证明, 若 A, B 是两个不同的"好集", 则必有 $A = B_{<b}$ 或 $A_{<a} = B$. 首先定义

$$C = \{c \in A \cap B : A_{<c} = B_{<c}\}$$

易知 C 不是空集. 下面证明, 若 $C \neq A$, 则存在 a, 使得 $C = A_{<a}$. 由于 $C \subset A$, 取 $A \backslash C$中的最小元 a, 则 $A_{<a} \subset C$. 若有 $c \in C \backslash A_{<a}$, 则 $a < c$, $a \in A_{<c} \subset C$. 矛盾! 则必有 $C = A_{<a}$.

若此时 $C = A_{<a}, C = B_{<b}$, 则有

$$a = g(A_{<a}) = g(B_{<b}) = b.$$

则 $a = b \in C$, 矛盾, 命题成立.

设 E 是所有"好集"的并, 则若 $a \in E$, A 是含有 a 的"好集", 有 $A_{<a} = E_{<a}$. 下面说明 E 是一个"好集".

- E 是全序集: 由其构成集合的关系易知.
- E 中不含无穷减列: 任意取出来减列中元素 a_1, 则取包含 a_1 的"好集"讨论即可.
- $g(E_{<a}) = a$: $a = g(A_{<a}) = g(E_{<a})$.

这说明了 E 是最大的"好集", 但 $E \cup \{g(E)\}$ 也是"好集", 与最大性矛盾!

选择公理证明良序定理

选择集合 X 的幂集的子集族, 并选取一般的选择函数. 任意选择最小元, 并使用

$$g(\alpha) = f(X \backslash \cup_{\beta<\alpha} \{g(\beta)\}).$$

进行归纳, 配合最大良序集的反证法即可.

良序定理证明选择公理

设 X 为一集族, 将 $\cup X$ 良序化. 则对于任意集族中的元素 A, 定义选择函数 f 为

$$f(A) = \min \{x | x \in A\}$$

即可.

Zorn引理证明良序定理

设集合为 X, 若其子集 W 上能够定义一个良序 $\leq$, 则将 $(W, \leq)$ 看作一个对. 定义偏序关系 $(W, \leq) \preceq (W', \leq')$, 指 $W \subset W'$ 且 $\leq'$ 在 W 上的限制为 $\leq$. 则易知其满足Zorn引理的条件, X 上必有一个极大的良序对 $(W_M, \leq_M)$.

若 $W_M \neq X$, 则取 $x_0 \in X \backslash W_M$, 定义新的良序子集:

$$W'_M = W_M \cup \{x_0\}, \quad x \leq'_M x_0, \forall x \in W_M.$$

则与W_M的极大性矛盾, 因此必有 $W_M = X$, 即良序定理成立!

Zorn引理证明选择公理

思路同上, 在幂集 X 的子集上若有选择函数存在, 可以定义偏序关系:

$$(X_1, f_1) \preceq (X_2, f_2).$$

即 X_1 是 X_2 的子集族, 且选择函数 $f_2|_{X_1} = f_1$. 则类似地使用Zorn引理与反证法, 可以说明极大子集族恰为集族 X.

4 三大公理的应用

4.1 选择公理

4.1.1 趣题一则

假设有100个绝顶聪明的人要参加一个游戏, 这个游戏参与**过程中**所有人不能以任何形式交流.[3]

道具: 假设有100个完全一样的房间, 房间中按顺序有相同的可列无穷张正面朝下的纸条, 纸条下写了一个实数.

规则:100个人同时进入这些房间(一人一个房间), 进入房间后, 可以查看除了一张以外的所有纸条(不要求在一开始就决定不看哪张, 可以先看一部分之后再做决定最后留下哪张不同, 每个人选择留下的纸条可能不同). 这时候, 他需要猜测这张未翻开纸条上的数, 如果猜错了, 死亡.

问题: 这100个人是否可以提前商量一个策略, 使得至少有99个人可以存活?

这个问题初看是荒唐的, 但是借助选择公理我们可以得到问题的解答.

解答

假设按顺序所有的纸条构成了一个可列无穷长的向量

$$x = (x_1, x_2, \ldots,) \in R^{\omega}.$$

在 R^{ω} 上构造等价关系 $\sim$: $x \sim y$ 当且仅当存在 x 与 y 仅有有限项不同. 此时在游戏前, 100名玩家统一一套等价类表, 从每个等价类中选取特殊的 x (选择公理).

下面给出第 i 个人的策略. 考虑$y^k = (x_k, x_{k+100}, \ldots,)$ 为所有下标模100余 k 的元素构成的子列. 那么 i 保留 y^i 而查看剩下所有的位置.

考虑 y^t 对应的代表元为 x^t, 设 $N_t = \max_{j \in N} \left\{ x_j^t \neq y_j^t \right\}$. 于是 N_t 是良定义的且 i 能观察到所有的 N_t, $t \neq i$.

设 $M_i = 1 + \max_{j \neq k} \{N_j\}$, 则 i 保留 y^i 的第 M_i 位, 查看其余所有数, 此时 i 已知道 y^i 的等价类 x^i, 并猜测 $y^i_{M_i} = x^i_{M_i}$.

可知 i 猜错仅当 $N_i \geq M_i = 1 + \max_{j \neq i} N_j$. 这个条件至多在一处满足. 因此这个策略可以保证至少99个人存活.

4.1.2 Banach-Tarski 悖论

设A和B是欧几里得空间的两个子集, 如果它们可以分为有限个不相交子集的并集, 形如 $A = \cup_{i=1}^n A_i$ 和 $B = \cup_{i=1}^n B_i$ 且对任意i, 子集 A_i 全等于 B_i, 那么这两个子集称为等度分解的.

则Banach-Tarski 悖论可以叙述为: 一个球和它自身的两个拷贝是等度分解的.

这个命题的证明较为复杂, 在此便不再展开. 这个真实的命题的荒谬之处在于, 我们可以将一个物体拆分为几个部分, 并经过拼接获得与原来物体相同的两个物体.

4.2 良序定理

4.2.1 超穷归纳原理

设 $(X, \leq)$ 是一个良序集, 则超穷归纳原理如下.

命题 4.1. *$(X, \leq)$ 是一个良序集, 对于某命题 P, 若有*

- *$\min X$ 满足命题 P.*
- *$\forall \beta < \alpha$, β 满足命题 P, 能推出 α 满足命题 P.*

则有 $\forall \sigma \in X$, σ 满足命题 P.

此原理有一应用, 即证明超穷基数的运算公式. 若有基数 $\sigma \leq \tau$, 则有 $\sigma + \tau = \tau$, $\sigma \cdot \tau = \tau$.

4.3 Zorn引理

4.3.1 泛函分析

Hamel基的存在性

对于有限维的线性空间, 我们可以定义基底, 并找出相应维数个数的一组基向量. 而对于无穷维的线性空间, 无论此处的无穷维是否可数无穷, 我们同样可以定义线性无关、基的概念.

无穷维线性空间如 $C[0,1]$, l^p, $L^p[a,b]$ 等, 是否同样能够找到一组基依赖于Zorn引理, 在承认Zorn引理的基础上, 任意线性空间都存在一组基.

证明. 定义偏序关系 $(V_1, S_1) \preceq (V_2, S_2)$ 代表线性空间与基底的偶对上的偏序, 此式意味着 $V_1 \subset V_2$ 为子空间, 且 $S_2|_{V_1}$ 为基底 S_1. 则易验证其满足Zorn引理的条件. 因此可以找到一个极大元 (V', S').

若此时有 $\operatorname{span}[S] = V$ 为全空间, 则已经证毕. 否则存在 $v_0 \in V \backslash V'$. 则新的空间偶对 $(V' + \mathbb{R}v_0, S' \cup \{v_0\})$ 与 (V', S') 的极大性矛盾! □

Hahn-Banach 定理

定理 4.2 (Banach扩张定理)**.** *设 $f(x)$ 是实线性空间 X 中的线性流形 G 上的实线性泛函. 如果有 X 上的实值泛函 $p(x)$, 使得*

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $p(tx) = tp(x)$, $x, y \in X$, $t \geq 0$;

(ii) $f(x) \leq p(x)$, $x \in G$,

则存在 X 上的实线性泛函 $F(x)$, 使

$$F(x) = f(x),\ x \in G,$$

且

$$F(x) \leq p(x), x \in G.$$

证明. 若线性流形 $G = X$, 则已经证毕, 否则可以取出来 $x_0 \in X \backslash G$, 我们则可以将线性泛函扩张到[2]

$$\mathscr{M} = \{\lambda x_0 + x : \lambda \in \mathbb{R}, x \in G\}$$

则同样地由Zorn引理, 知这样的操作可以扩张到整个 X 上. □

定理 4.3 (Hahn-Banach)**.** *对于赋范线性空间 X 上的线性流形 G 上的连续线性泛函 $f(x)$, 恒有 X 上的连续线性泛函 $F(x)$, 使得*

(i) $F(x) = f(x)$, 当 $x \in G$.

(ii) $\|F\|_X = \|f\|_G$

4.3.2 代数学

我们列举几个证明中使用到Zorn引理的代数学经典命题.

交换环极大理想的存在性

我们可以根据双边理想的包含关系构造偏序集, 并且由于理想的并仍为理想, 知理想中含有极大元, 即极大理想.

关于交换环 R 中的某个极大理想 M, 我们有 R/M 为域. 由于极大理想不唯一, 所有极大理想的交集构成环 R 的 Jacobson radical, 记为$J(R)$, 其在交换代数中具有良好的应用.

代数闭包的存在性[4]

对于某个域 k, 其代数闭包 $\bar{k}$ 存在. 这个定理的证明更加侧重于选择公理的使用. 对于任意一个 k 上的多项式 $f \in k[x]$, 定义未定元 t_f. 设 $R = k[T]$ 为多项式环, 其中 T 是所有的未定元 t_f 构成的集合.

设 I 是由所有 $f(t_f)$ 多项式生成的双边理想, 则其必包含在交换环 R 的某个极大理想 M 中, 此时可以证明 R/M 是 k 的代数闭包.

Baer 判别法

Baer 判别法是判别模是否为内射模的一个理论层的判别法.

设 M 为 R 上的左模, 则若 $Hom_R(-, M)$ 是一个右正合函子, 则称 M 为内射模(injective module). 由于函子 $Hom_R(-, M)$ 是左正合的, 其右正合当且仅当正合.

定理 4.4 (Baer Criterion)**.** *一个左 R 模是内射模当且仅当每一个 R 映射 $f : I \to E$, I 为 R 的左理想, 都可以扩张到 R 上.*

其证明可见[4].

Nielsen-Schreier 定理

定理 4.5 (Nielsen-Schreier)**.** *自由群的子群仍是自由群.*

本质上自由群的构造仍需要涉及无穷, 自由字对于所有关系构成的正规子群作商群生成了自由群.

4.3.3 拓扑学

Urysohn 引理[5]

Urysohn 引理是多个分离定理中较为经典之一.

定理 4.6 (Urysohn)**.** *正规空间中不相交的闭集可以被连续函数隔离. 即若 X 是正规空间, A, B 是 X 中两个不相交的非空闭集, 则存在连续函数 $f : X \to [0, 1]$, 使得 $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.*

我们仅介绍Urysohn定理的证明思路.

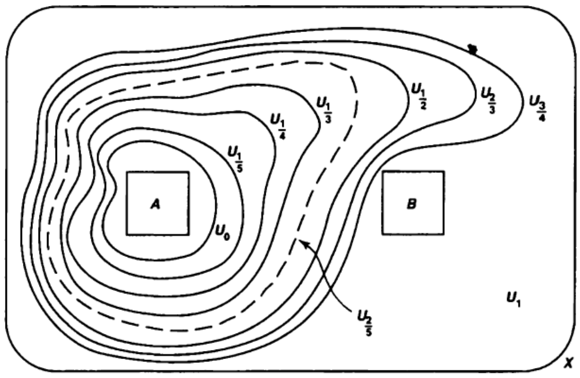

图 1: Urysohn Lemma [5]

首先考虑 $P = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, 每一个 $p \in P$都能够对应一个 A 的开邻域 U_p, 满足 $p < q \implies d(U_p) \subseteq U_q$. 这一过程由良序定理, P 的可列性, 空间 X 的正规性得到.

$U_p = \emptyset$, $p < 0$; $U_p = X$, $p > 1$. 则完全定义了 p 与 U_p 的关系.

定义 $f : X \to [0, 1]$, 为

$$f(x) = \inf \{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}.$$

则可以验证完成证明.

Tychonoff 定理[5]

再给出Zorn引理在拓扑学中的一例应用, 限于篇幅略去其证明.

定理 4.7 (Tychonoff)**.** *紧空间的乘积拓扑仍是紧的.*

5 范畴论

在本节中, 我们浅给出集合作为具体实例在更抽象的领域中的应用.

5.1 集合是极限完备的

定义 5.1 (小范畴)**.** *若一个范畴 $\mathcal{C}$ 的对象类和态射类都是集合, 则称范畴$\mathcal{C}$为小范畴.*

定义 5.2 (上锥[6])**.** *对于一个小范畴 J 到范畴 $\mathcal{C}$ 上的函子 F, F 以 $c \in Obj(\mathcal{C})$ 为锥顶的上锥定义为所有的自然变换 $Nat(1_c, F)$. 将对象映射到其所有F的上锥的函子记为 $Cone(-, F) : \mathcal{C}^{op} \to Set$.*

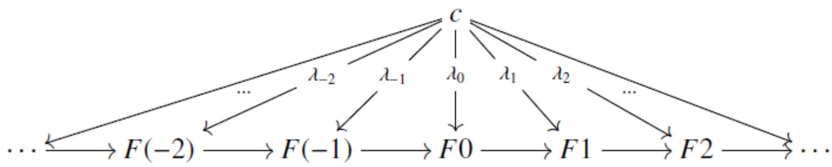

图 2: Example: Cone over F.[6]

定义 5.3 (极限)**.** *对于一个小范畴 J 到范畴 $\mathcal{C}$ 上的函子 F, 其极限定义为 $Cone(-,F)$ 的一个表示. 记为 $limF$.*

$$Hom_{\mathcal{C}}(-,limF)\simeq Cone(-,F).$$

定义 5.4 (完备范畴)**.** *若对于任意的小范畴 J 和函子 $F:J\to\mathcal{C}$, 极限都存在, 则称范畴 C 是完备的.*

定理 5.5 (集合范畴是完备的)**.** *由于集合范畴中存在初始对象$\{1\}$, 则集合范畴中关于 $F:J\to Set$ 的极限可以表示为:*

$$limF\simeq Hom_{\mathcal{C}}(1,limF)\simeq Cone(1,F).$$

对应的自然变换的分量为: 设 $\sigma\in\mathrm{Cone}(1,F)\in\mathrm{Obj}(Set)$. 则对任意 $i\in J$, σ 具有分量集合映射 $\mu_i:\{1\}\to F(i)$.

则构造此时的分量集合映射: $\lambda_i:\sigma\longmapsto\mu_i(\{1\})\in F(i)$. 容易验证分量构成自然映射的分量. 则说明集合范畴是完备范畴.

参考文献

[1] 谢邦杰. 超穷数与超穷论法[M]. 长春: 吉林人民出版社 1979: 20-23.

[2] 江泽坚, 孙善利. 泛函分析[M]. 第2版北京: 高等教育出版社 2005: 80-84, 94-95.

[3] 知乎网, 用户Bellaris, 选择公理有哪些反直觉的应用? [EB/OL]. https://www.zhihu.com/question/359342434/answer/922874026

[4] Joseph J.Rotman. Advanced Modern Algebra[M]. Third Edition, Part 1, Volume 165. American Mathematical Society 2015: 341-343, 494-495.

[5] James R.Munkres. Topology [M], Second Edition, Prentice Hall 2000: 207-210, 230-235.

[6] Emily Riehl, Category Theory in Context [M], Dover Publications, 2016: 74-75.