最优控制理论基础及在物理、管理上的应用

10190615 田泽禹

2022 年 5 月 29 日

目录

1 最优控制理论基础

最优控制理论主要考虑的问题是在**控制变量**在**容许控制函数集**中取值时，在**状态方程**的影响下，衡量整个控制过程的**性能指标**达到目标的过程。

1.1 变分法

1.1.1 欧拉方程

(Euler) 对于单宗量的泛函问题, t_0, x_0, t_1, x_1 固定, 则

$$\begin{cases} J(x(t)) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) \mathrm{d}t \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \end{cases} \tag{1}$$

在容许函数集合

$$\Omega = \big\{x(t): \ x(t) \in C^2[t_0, t_1], \ x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1\big\}$$

内取得极值的必要条件为

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{\dot{x}} = 0. \tag{2}$$

当考虑含有多个宗量的泛函

$$J(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \mathrm{d}t.$$

其两个端点

$$x(t_0) = (x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))^T, \quad x(t_1) = (x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1))^T.$$

在容许函数集合

$$\Omega = \big\{x = (x_1, \ldots, x_n)^T: \ x_i(t) \in C^2[t_0, t_1], \ x_i(t_0) = x_i^0, \ x_i(t_1) = x_i^1, \ i = 1, \ldots, n\big\}$$

内取得极值的必要条件为

$$F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{\dot{x}_i} = 0. \tag{3}$$

1.1.2 泛函条件极值

当考虑含有多个宗量的泛函

$$J(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \mathrm{d}t.$$

在约束条件

$$G(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) =$$

下取极值问题，仅需要构造辅助函数

$$\tilde{F}(t, x, \dot{x}, \lambda) = F(t, x, \dot{x}) + \lambda^T(t) G(t, x, \dot{x}).$$

再分别对x的分量, λ的分量作Euler公式即可。

1.1.3 不同边界条件

在方程[1]的条件下，假设终止时刻的终端自由变动，则泛函解满足的必要条件为

$$\begin{cases} F_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{\dot{x}} = 0. \\ x(t_0) = x_0,\ F_{\dot{x}} \mid_{t=t_1} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

在方程[1]的条件下，假设终止时刻的终端变动，终端落在曲线 $x = \varphi(t)$ 则泛函解满足的必要条件为

$$\begin{cases} F_x - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{\dot{x}} = 0., \\ x(t_0) = x_0, \\ F + (\dot{\varphi}(t) - \dot{x}(t)) F_{\dot{x}} \mid_{t=t_1} = 0. \\ x_1 = \varphi(t_1). \end{cases} \tag{5}$$

1.1.4 具有终端性能指标泛函

当性能指标为具有终端性能指标项时

$$J(x(t)) = \Phi(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) \mathrm{d}t.$$

我们考虑以下几种情况

- t_1时刻终端自由.
- t_1时刻终端有约束.
- t_1终止时刻不定.

我们分别讨论，可以得到:

t_1**时刻终端自由**: 则我们需要加入以下条件

$$F_{\dot{x}}|_{t=t_1} = -\frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial x(t_1)} \tag{6}$$

t_1**时刻终端有约束**: 设终端满足约束

$$N_i(x_1(t_1),\dots,x_n(t_1))=0,\quad i=1,\dots,r;r<n$$

的条件下, 则只需要将泛函极值问题改为

$$\tilde{J}(x(t))=\Phi(x(t_1))+\sum_{i=1}^{r}\mu_i N_i(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}F(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t \tag{7}$$

再将其视为终端无约束条件问题解决即可.

t_1**终止时刻不定**: 则我们需要再加入以下条件

$$\left[\Phi_t+(\Phi_x)^T\dot{x}+F(t,x(t),\dot{x}(t))\right]|_{t=t_1^*}=0 \tag{8}$$

由此我们可以总结一般的求解过程，即

1. 首先考察泛函问题是否是含有限定条件、终端限制条件、终端性能指标的, 若有, 则将其先化为一般形式, 即

$$\tilde{J}(x(t))=\Phi(x(t_1))+\sum_{i=1}^{r}\mu_i N_i(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}\left(F(t,x,\dot{x})+\lambda(t)^T G(t,x,\dot{x})\right).$$

2. 此时若终端自由, 则将终端性能整体看作Φ, 列出方程[6].

3. 此时若终时自由, 则将$\tilde{J}$在极值解处关于t的导数为0即可, 如方程[8]

1.1.5 哈密顿函数方法

此时我们考虑问题

$$J(u(t))=\int_{t_0}^{t_1}f_0(t,x,u)\mathrm{d}t \tag{9}$$

在约束状态

$$\dot{x}=f(t,x,u),\quad x(t_0)=x_0,\quad x(t_1)=x_1 \tag{10}$$

下达到最大值.

此时虽然结构与我们之前讨论过的结构完全相同，但由于此时状态方程的特殊性，我们可以将解的必要条件简化为

$$\begin{cases}\dot{\lambda}(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x},\\ \dfrac{\partial H}{\partial u}=0,\\ \dot{x}=f(t,x,u).\end{cases} \tag{11}$$

其中$H(t,x,u,\lambda)=f_0(t,x,u)+\lambda^T(t)f(t,x,u)$成为哈密顿(Hamilton)函数.

若考虑除了终端有约束外，其余固定，性能指标为

$$J(u(t)) = \Phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u)\mathrm{d}t \tag{12}$$

在约束状态

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x(t_0) = x_0 \tag{13}$$

和终端约束

$$N_i(x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) = 0, \quad i = 1, \ldots, r;\ r < n \tag{14}$$

下达到最大值. 则方程可以简化为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0, \\ \dot{x} = f(x,u), \\ \lambda(t_1) = \dfrac{\partial}{\partial x(t_1)}\left[\Phi(x(t_1)) + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i N_i(x(t_1))\right]. \end{cases} \tag{15}$$

且由于状态方程与性能指标方程不显含t, 我们可以推导获得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

于是

$$H(x,u,\lambda) = H(x(t_1), u(t_1), \lambda(t_1)) \equiv c.$$

在一般的条件下, 我们可以得到相似的结果, 若考虑除了终端有约束且时刻不定外，其余固定，性能指标为

$$J(u(t)) = \Phi(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x,u)\mathrm{d}t \tag{16}$$

在约束状态

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0 \tag{17}$$

和终端约束

$$N_i(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) = 0, \quad i = 1, \ldots, r;\ r < n \tag{18}$$

下达到最大值. (所有项均显含t, 非自治系统)此时有方程组:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0, \\ \dot{x} = f(t, x, u), \\ \lambda(t_1) = \dfrac{\partial}{\partial x(t_1)} \left[\Phi(t_1, x(t_1)) + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i N_i(t_1, x(t_1)) \right]. \\ \left[H + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i \dfrac{\partial N_i}{\partial t} \right] |_{t=t_1} = 0. \end{cases}$$

其中前2项为Euler公式的推论, 第3项为状态方程, 第4项为终端约束的推论, 第5项为终时自由的推论. 同样地我们可以获得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

进而有

$$H(t, x, u, \lambda) = H(t_1, x(t_1), u(t_1), \lambda(t_1)) + \int_{t_1}^{t} \frac{\partial}{\partial t} H(s, x(s), u(s), \lambda(s)) \mathrm{d}s.$$

总结: 我们可以观察到, 中间约束方程与终端约束方程均可考虑乘子法将其化为无约束方程, 而无终端约束导出的方程我们已经讨论过; 若时间是无约束的, 则我们需要J对于时间的导数为0.

1.2 最大值原理

1.2.1 最大值原理

我们的最大值原理一节中，性能指标均为终端性能指标, 由于我们能够将终端约束项加入终端性能指标中, 所以我们现在只考虑两种情况.

一、初始时刻和终止时刻已定, 初端给定终端自由的最优控制问题

考虑状态方程为定常系统

$$\dot{x}(t) = f(x, u)$$

目标泛函为终端性能指标

$$J(u(t)) = \Phi(x(t_1)) \tag{19}$$

且$x(t_0) = x_0$给定, 终端自由的最优控制问题, 则本问题的最大值原理为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ \lambda(t_1) + \dfrac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial x(t_1)}. \\ H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \max\limits_{u \in U} H(x^*(t), \lambda(t), u(t)). \\ H(x^*, u^*, \lambda) = H(x^*(t_1), u^*(t_1), \lambda(t_1)) \equiv c. \end{cases} \tag{20}$$

其中第3项为替代了 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 的一项, 加强了极值要求并减弱了光滑性的要求. 式子中的 $H(x, \lambda, u) = \lambda(t) f(x, u)$ 为哈密顿函数.

二、初始时刻和初端已定, 终止时刻不定终端自由的最优控制问题

考虑状态方程为

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u)$$

目标泛函为终端性能指标

$$J(u(t)) = \Phi(t_1, x(t_1)) \tag{21}$$

且$x(t_0) = x_0$给定, t_1不定且终端自由的最优控制问题, 则本问题的最大值原理为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ \lambda(t_1) + \dfrac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial x(t_1)}. \\ H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \max\limits_{u \in U} H(x^*(t), \lambda(t), u(t)). \\ H(t_1, x^*(t_1), \lambda(t_1), u^*(t_1)) = -\dfrac{\partial}{\partial t} \Phi(t_1, x^*(t_1)). \\ H(t, x^*, u^*, \lambda) = H(t, x^*(t_1), u^*(t_1), \lambda(t_1)) + \displaystyle\int_{t_1}^{t} \dfrac{\partial}{\partial t} H(s, x^*(s), \lambda^*(s), u^*(s)) \mathrm{d}s. \end{cases} \tag{22}$$

其中第3项为替代了$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$的一项, 加强了极值要求并减弱了光滑性的要求. 式子中的 $H(t, x, \lambda, u) = \lambda(t) f(t, x, u)$ 为哈密顿函数.

1.3 动态规划

1.3.1 离散型动态规划

我们使用控制函数来确定整个系统的指标函数的最优值. 状态转移方程为

$$x(k+1) = f_k(x(k), u(k), k), \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

我们仅需要记住一点原则, 在第k步的所有情况的最优行动形成一个k处的最优策略, 此时计算出k处及以后的指标, 便可以忽略后面所有的行为, 变成一个在$0,1,\dots,k-1$ 步取值的k步规划问题. 用最优性原理的语言来解释, 即每一个最优策略的任意一步开始的子策略都是子规划的最优策略.

$$J_0[x(0),p_{0N}^*] = \underset{p_{0,k-1}\in P_{0,k-1}(x(0))}{\operatorname{opt}} [J_{0,k-1}\left[x(0),p_{0,k-1}\right] + \operatorname{opt} p_{kN} J_k\left[x(k),p_{kN}\right]]$$

解决问题时要使用逆推的算法.

1.3.2 离散系统最优控制的动态规划

与离散型动态规划思路相同, 解决问题时要使用逆推的方法.

1.3.3 连续系统最优控制的动态规划

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), \quad t\in[0,T].$$

边界条件为 $x(0)=x_0$, $x(T)$自由, 性能指标为

$$J[u(t)] = g(x(T)) + \int_0^T F(x(t),u(t))dt.$$

嵌入

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), \quad t\in[t,T].$$

边界条件为 $x(t)=a$, $x(T)$自由, 性能指标为

$$J_{a,t}[u(s)] = g(x(T)) + \int_t^T F(x(t),u(t))dt.$$

设

$$V(a,t) = \sup_{u\in A} J_{a,t}[u], \quad a\in\mathbb{R}^n, t\in[0,T].$$

则有如下定理.

(Hamilton-Jacobi-Bellman Equation) 假设值函数$V(a,t)$是自变量的C^1函数, 则$V(a,t)$满足以下方程:

$$(HJB) \quad V_t(a,t) + \max_{u\in A}\{f(a,u)\cdot\nabla_a V(a,t) + F(a,u)\} = 0. \tag{23}$$

1.4 可控性和可观测性

1.4.1 可控性

线性自治控制系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u \in U = \mathbb{R}^m \tag{24}$$

其中, A为n阶常矩阵, B为$n \times m$常矩阵, 控制系统[24]为可控的充分必要条件为,

$$T = \left(B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right)$$

的秩为n.

若仅考虑控制函数集为特殊集U的情况下, 我们有若以下三个条件成立

1. O为U的内点.
2. $\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$.
3. A的每一个特征值λ都有$\operatorname{Re}\lambda \leq 0$.

那么任意时刻t_0处的零可控性域都等于$\mathbb{R}^n$.

最后给出非自治系统可控的一个充分必要条件

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad u \in U = \mathbb{R}^m \tag{25}$$

假设当$t \geq t_0$时$A(t)$为$k-2$次可微, $B(t)$为$k-1$次可微, 定义$n \times m$ 矩阵序列 $\{M_j(t)\}$ 为

$$M_0(t) = B(t),$$
$$M_{j+1}(t) = -A(t)M_j(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_j(t), \quad j = 0, 1, \ldots, k-2.$$

若对某个正整数k及每一个$t_1 > t_0$, 存在一个 $t \in [t_0, t_1]$, 使得

$$\operatorname{rank}\left[M_0(t), M_1(t), \ldots, M_{k-1}(t)\right] = n,$$

那么系统[25]在t_0处是可控的.

离散系统的情况 若考虑离散系统

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k).$$

则A可逆时, 系统[1.4.1]完全可控的充要条件是矩阵

$$(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b)$$

满秩, 若A不可逆则充要条件变为

$$\operatorname{span}\left[b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\right] \supseteq \operatorname{span}\left[A^k\right].$$

1.4.2 可观测性

设控制与输出方程分别为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{26}$$

$$y(t) = Cx, \tag{27}$$

则系统[26]是可观测的充要条件为

$$\operatorname{rank}\left(C^T, A^T C^T, \ldots, (A^T)^{n-1} C^T\right) = n.$$

当考虑离散系统时

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \tag{28}$$

则此系统完全可观测的充分必要条件是矩阵

$$M = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

的秩等于n.

1.5 离散控制系统

与连续系统的思路相似, 所得到的公式形式上也相似, 本小节的结果不再一一列出.

2 最优控制理论应用

2.1 物理模型领域

变分法的一个经典的案例就是所谓的最速降线问题, 最速降线问题也是历史上第一个出现的变分法问题, 也是变分法发展的一个标志. 此问题是1696年约翰·伯努利在写给他哥哥雅克布·伯努利的一封公开信中提出的. 问题的提法是: 设A和B是铅直平面上不在同一铅直线上的两点, 在所有连接A和B的平面曲线中, 求出一条曲线, 使仅受重力作用且初速度为零的质点从A点到B点沿这条曲线运动时所需时间最短. 最终使用变分的方法我们可

以很容易地求得这条曲线是摆线方程, 这个例子以时间为性能指标便成为了一个最优控制的问题, 也是最优控制理论在数学物理中的一个重要的应用. 下面我们介绍另外两个经典的例子.

2.1.1 飞船的月球软着陆问题

飞船的月球软着陆问题(同样也为课本举例) 飞船靠其发动机产生一与月球重力方向相反的推力f, 赖以控制飞船实现软着陆(落到月球表面上时速度为零). 要求选择一最好发动机推力程序$f(t)$, 使燃料消耗最少.

设飞船质量为m, 它的高度和垂直速度分别为h和v. 月球的重力加速度可视为常数g, 飞船的自身质量及所带燃料分别为M和F.

自某$t=0$时刻开始飞船进入着陆过程. 其运动方程为

$$\begin{cases} \dot{h} = v, \\ \dot{v} = \dfrac{f}{m} - g, \\ \dot{m} = -kf. \end{cases} \tag{29}$$

其中k为一常数. 要求控制飞船从初始状态

$$h(0) = h_0,\ v(0) = v_0, m(0) = M + F$$

出发, 于某一时刻 t_f 实现软着陆, 即

$$h(t_f) = 0,\ v(t_f) = 0.$$

控制过程中推力$f(t)$不能超过发动机所能提供的最大推力f_{max}, 即

$$0 \le f(t) \le f_{max}$$

满足上述限制, 使飞船实现软着陆的推力程序$f(t)$不止一种, 其中消耗燃料最少者才是最佳推力程序, 易见, 问题可归结为求

$$\max J = m(t_f)$$

的数学问题.

观察问题可知, 此问题中推力程序$f(t)$为控制变量, 且在任意时刻在一闭集上取值, 状态变量为h, v, m. 其为初始时刻与初始值固定, 终时与终端不定的最优控制问题. 性能指标为终端型 $m(t_f)$. 此时代入连续控制系统极大值原理的公式即可解出具体表达式.

2.1.2 防天拦截问题

防天拦截问题 所谓防天拦截是指发射火箭拦击对方洲际导弹或其它航天武器.

设$x(t), v(t)$分别表示拦截器L与目标M的相对位置和相对速度向量. $a(x, v)$是包括空气动力与地心引力所引起的加速度在内的相对加速度向量, 它是x, v的函数, 既然位置和速度向量是由运动微分方程所确定的时间函数, 因此相对加速度也可以看成时间的函数. 设$m(t)$是拦截器的质量, $f(t)$是其推力的大小. 用u表示拦截器推力方向的单位向量. C是有效喷气速度, 可视为常数. 于是, 拦截器与目标的相对运动方程可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = a(x, v) + \dfrac{f(t)}{m(t)} u \\ \dot{m} = -\dfrac{f(t)}{C} \end{cases}$$

初始条件为

$$x(t_0) = x_0,\ v(t_0) = v_0,\ m(t_0) = m_0.$$

为实现拦截, 既要控制拦截器的推力大小, 又要改变推力方向. 拦截火箭的最大推力是一有限值f_{max}, 瞬时推力$f(t)$应满足

$$0 \le f(t) \le f_{max}$$

单位向量u, 它可以表示为

$$|u|^2 = u^T u = 1$$

此时其容许控制的函数集为

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ x | x^T x = 1 \right\}$$

为闭集.

要求控制拦截器从相对于目标的初始状态出发, 于某末态时刻t_f与目标相遇实现拦截, 即

$$x(t_f) = 0$$

且应满足

$$m(t_f) \le m_e$$

这里, m_e是燃料耗尽后拦截火箭的质量. 当然此式可以化为关于f的终端约束条件.

一般说来, 达到上述控制目标的$f(t)$, $u(t)$和t_f并非唯一. 为了实现快速拦截, 并尽可能地节省燃料, 可综合考虑这两种要求, 取性能指标为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left[C_1+f(t)\right]\mathrm{d}t \tag{30}$$

问题归结为选择$f(t)$, $u(t)$和t_f, 使规定的性能指标为最小. 这同样是一个使用最大值原理连续控制系统的问题.

关于u的处理, 我们可以将其化为一般的变量进行求解, 由于u在单位球面上, 因此我们可以换为球极坐标.

$$\begin{cases} x=\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y=\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z=\cos(\theta) \end{cases}$$

其中 $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le2\pi$.

此外, 在更加复杂的物理领域, 如电力系统励磁控制, 化工配料比, 航天飞行仿真, 列车悬吊系统, 谐波减速器等方面拥有更加复杂的应用, 方法也不局限于最优控制的基础方法.

2.2 管理领域应用

在经济管理领域, 最优控制的方法也同样拥有诸多应用, 以课本中的经典案例举例.

2.2.1 基金的最优管理问题

案例一. 基金的最优管理问题(课本案例)

基金会得到一笔60万元的基金, 现将这笔款存入银行, 年利率为10%, 该基金会计划用80年, 80年后仅剩0.5万元用作基金会的结束事宜, 根据基金会的需要, 每年至少支取5万元至多支取10万元作为某种奖金. 我们的问题是制定该基金的最优管理策略, 即每年支取多少元才能使基金会在80年中从银行取出的总金额最大.

该问题便是最大值原理的一个例子.

或对于小的系统, 需要考虑离散化

(短期生产计划)设有若干台同样的机器, 每台机器可以做两种工作, 如果用于做第一种工作, 每台每年可获利3万元, 机器的损坏率为 $\frac{2}{3}$; 如果用于做第二种工作, 每台每年可获利2.5万元, 机器的损坏率为 $\frac{1}{3}$; 现考虑3年的生产周期, 试确定如何安排生产计划可获得最大利润.

2.2.2 森林碳汇核算计量模型

森林是重要的陆地生态系统, 在应对全球气候变化中扮演着重要的角色. 森林碳汇指森林等吸收并储存CO_2的多少, 或者吸收并储存CO_2, 的能力. 森林碳汇对降低大气中温室气体浓度, 减缓全球气候变暖具有十分重要的作用.

为了更好地对我国森林碳汇进行研究和管理, 促进碳汇市场的发展, 我们可以建立森林碳汇核酸的模型对森林碳储备量进行估计, 进而估计并做出合理的利用方式, 使得经济与生态效益最大化.

根据森林生长特性和离散时间经济系统控制方程, 森林碳汇核算公式可以简单地抽象为下面的理论模型[5]:

$$\begin{cases} C(k+1) = C(k) + G(k) - W(k) - L(k) \\ C(k_0) = C_0 \\ C(k) \geq 0, \quad 0 \leq L(k) \leq L(k)_{max} \end{cases} \tag{31}$$

式中$C(k)$为森林蓄积的碳储量(单位t), $G(k)$为森林生长的碳储量(单位t), $W(k)$为森林枯损的碳储量(单位t), $L(k)$为森林采伐的碳储量(单位t), k为年份.

在上述模型中, $L(k)$ 为控制变量, 其他变量为状态变量. 森林碳汇核算就是要在方程[31]的约束下, 使森林生物碳储量损失的价值最小. 即

$$\min J_k = \varphi(C(N), N) + \sum_{k=1}^{N-1} F(C(k), L(k), k) \tag{32}$$

其中 $\varphi(C(N), N)$ 是森林碳储量价值的终端约束.

根据研究[6], 森林碳汇量 C_F 与森林蓄积量 V_F 之间有关系, 经过代入系数可以得到表达式

$$C_F = 2.439\,(V_F \times 1.9 \times 0.5 \times 0.5)$$

根据国家林业数据,使用线性回归的方法可以得到森林碳汇的核算模型为

$$C(k+1) = 1.011C(k)$$

林木资源碳储量的消耗和经济发展之间存在一定的关系, 拟合GDP与与采伐损失碳储量的关系得[7].

$$GDP = -7343062.440 + 3516775.471L(k) - 412558.604L^2(k).$$

根据有关研究报告, 2020年我国森林每年采伐利用总量折算成森林生物碳储量为11.59亿t. 因此, 森林碳汇的状态方程为

$$\begin{cases} C(k+1) = 1.011C(k) \\ C(k_{1990}) = 118.44 \\ C(k) \geq 0, \quad 0 \leq L(k) \leq L(k)_{max} = 11.59. \end{cases}$$

性能指标为

$$\min J_{31} = 10.11C(k) - 2317.10 + \sum_{k=1}^{30}(GDP(k)) \tag{33}$$

则令哈密顿函数

$$H(k) = \begin{aligned} & H(C(k), L(k), \lambda(k+1), k) = \\ & 10.11C(k) - 2317.1 - 7343062.440 + \\ & 3516775.471L(k) - 412558.604L^2(k) + \\ & \lambda^T(k+1) \times 1.011C(k) = \\ & -7345379.54 + 3516775.471L(k) - \\ & 412558.604L^2(k) + (1.011\lambda^T(k+1) + 10.11)C(k) \end{aligned} \tag{34}$$

解方程

$$\dot{\lambda}(k) = \frac{\partial H^*(k)}{\partial C^*(k)}$$

$$\frac{\partial H^*(k)}{\partial L^*(k)} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi^*(N)}{\partial C^*(N)} = \lambda^*(N)$$

最终得到

$$\lambda^*(N) = 10.11 \tag{35}$$

此时, 每年森林采伐利用量应为4.26亿m^3. 因此上述计算结果的具体含义为, 我国森林碳汇的最优价格为10.11 15.17美元/t, 略高于目前国际上通用的碳汇价格, 反映出我国碳汇的价值变化应与国际碳汇的价值变化大体一致[4].

2.3 总结与展望

最优控制理论在管理科学方面的应用已取得了很多极有价值的应用成果. 其中代表性的是美国学者S.P.塞申和G.L.汤普生所著的《最优化管理》

一书. 书中概述了最优控制理论在金融中的最优投资, 生产与库存, 推销, 机器设备的保养与更换等问题的应用; 在经济方面的应用主要是根据宏观经济相互依赖关系的计量经济模型提供经济预测, 解释经济问题的动态行为. 朱道立编著的《大系统优化理论与应用》中运用最优控制理论建立经济模型, 用GRG算法来解释经济问题, 形成经济学科中的经济最优控制. 许多专家在研究动态最优稳定性经济政策中也论证了最优控制在经济方面的突出作用. 在自然资源和人口方面可以应用最优控制理论来分配不可再生资源和可再生资源. 此外, 最优控制在人才分配方面的应用也有研究报道[1].

目前最优控制理论也有诸多新进展, 如在线优化方法中局部参数最优化和整体最优化设计方法、预测控制中的滚动优化算法、稳态递阶控制、系统优化和参数估计的集成研究方法; 智能优化方法中神经网络优化方法、遗传算法、模糊优化算法等等.

由于传统的最优控制严重依赖动态系统的机理模型, 难以抵抗干扰, 且求解的解域和解的性态不必要因素较多, 在对实际问题求解的考量中, 近年强化学习有了较大的发展. 强化学习的无模型版本是依赖采样进行优化决策, 而非依赖机理模型. 模型预测控制也在过程控制领域得到了长足的应用. 模型预测控制可以理解为贪婪版本的最优控制. 强化学习和模型预测控制在实用性上比最优控制是要好的, 而且所能的应用场景更加广泛. 因此淡化机理模型的将会成为主流趋势.

参考文献

[1] 百度百科, 最优控制理论 [EB/OL]. https://baike.baidu.com/.

[2] 知 乎 网, 用 户 王 源, 最 优 控 制 理 论 是 什 么? [EB/OL]. https://www.zhihu.com/question/299005129/.

[3] 陈金鹤, 汪正中, 田洪源, 基于最优控制理论的倾转旋翼机跃障飞行仿真 [J]. 西北工业大学学报 2020 38 第6期 P1266-1274 1000-2758.

[4] 张颖, 吴丽莉, 苏帆, 杨志耕, 我国森林碳汇核算的计量模型研究 [J]. 北京林业大学学报 2010 32 第2期 P194-200 1000-1522.

[5] 曾祥金. 经济控制论基础 [M]. 北京:科学出版社, 1995: 55-74.

[6] 李顺龙. 森林碳汇问题研究 [M]. 哈尔滨: 东北林业大学出版社. 2006: 100-101.

[7] 张颖, 侯元兆, 魏小真等, 北京森林绿色核算研究 [J] 北京林业大学学报, 2008, 30 (增刊 1) 232-237.