

高等代数 I

第 9 次讨论班

2022 年 11 月 14 日

问题 1. 请思考以下的知识点

- (1) 矩阵的初等变换有哪些, 具有哪些性质.
- (2) 给矩阵作行 (列) 初等变换如何用矩阵表示.
- (3) 给出矩阵等价的定义, 及其充分必要条件.
- (4) 给出矩阵秩数的定义, 并给出其它相同数值的刻画.
- (5) 请给出矩阵打洞法 Schur 公式的证明.

问题 2. 设 A, B, C, D 均为 n 阶矩阵且 A 和 C 可换. 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

问题 3. 判断矩阵的奇异性 (即可逆性).

- (1) 求证: n 阶方阵 A 是奇异矩阵的充分必要条件是, 存在非零的同阶方阵 B , 使得 $AB = O$.
- (2) 求证: n 阶方阵 A 是奇异矩阵的充分必要条件是, 存在 n 维非零列向量 x , 使得 $Ax = 0$.

问题 4. 使用矩阵初等变换的方法求矩阵 A 的逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

问题 5. 求证: 任一 n 阶矩阵均可表示为形如 $I_n + a_{ij}E_{ij}$ 这样的矩阵之积, 其中 E_{ij} 是 n 阶基础矩阵, a_{ij} 为一实数.

问题 6. 设 A 为 n 阶实反对称矩阵, 证明:

- (1) 对任意 n 维列向量 x , 有 $x^T Ax = 0$. (这个条件也是充分的).
- (2) $I_n - A$ 是非奇异矩阵.

问题 7. 证明以下矩阵秩的不等式 *(各组可按情况拓展理解矩阵秩不等式)

- (1) 证明: $\text{rank}A - \text{rank}B \leq \text{rank}(A - B) \leq \text{rank}A + \text{rank}B$.
- (2) $\text{rank}(A B) \leq \text{rank}A + \text{rank}B$.

问题 8. 证明: n 阶矩阵 \mathbf{A} 与其伴随矩阵 \mathbf{A}^* 的秩数有如下关系:

$$\text{rank}\mathbf{A}^* = \begin{cases} n, & \text{rank}\mathbf{A} = n, \\ 1, & \text{rank}\mathbf{A} = n - 1, \\ 0, & \text{rank}\mathbf{A} \leq n - 2. \end{cases}$$

在拥有矩阵初等变换, 等价标准型的知识后, 我们可以给出如下两个比较重要的命题.

问题 9. n 阶方阵 \mathbf{A} 的行列式为零的充分必要条件是, 其某行 (列) 可以表示为其它行 (列) 的线性组合. (我们在行列式运算中曾了解充分性, 其实此命题是充分必要的)

问题 10. 我们称一个矩阵是行对角占优的, 指对于方阵 \mathbf{A} 的元素 a_{ij} , 有

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, \dots, n)$$

如果上述定义的不等式都严格成立, 则称为行严格对角占优矩阵.

证明: 如果 \mathbf{A} 具有严格对角占优, 则 \mathbf{A} 为非奇异矩阵.