Linear Algebra I

Supplementaries - 8

ζ

November 14, 2022

注: 除矩阵广义逆为拓展内容外, 其余内容建议烂熟于心.

1 秩不等式

回想我们如何描述一个空间代数本质上的大小, 我们曾使用维数, 秩数等词汇. 我们在线性空间中可以定义维数, 在矩阵中可以定义秩数, 那么这些概念互相有如何的联系?

Propsition 1.1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 = 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列空间的秩 = 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行空间的秩.

在矩阵打洞和求秩时, Schur 定理也有举足轻重的左右, 因此我们将其列举至此.

Theorem 1.1 (Schur)**.** *关于分块矩阵的初等变换有*

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

Problem 1.1. *我们列举秩的一些等式与不等式, 为求简便, 我们以* $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ *记矩阵的秩.*

(1) 若 $k \neq 0$, $\mathrm{rank}\,(k\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A})$*;*

(2) $\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leq \min\{\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A})\,, \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{B})\}$*;*

(3) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{B})$*.*

(4) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{B})$*,* $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{B})$*;*

(5) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \leq \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{B})$*,* $\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}\;\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{B})$

(6) $\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{B})$*,* $\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{B})$

(7) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \geq |\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})-\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})|$

Problem 1.2 (对合矩阵)**.** *设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对合矩阵当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n$.*

Problem 1.3 (幂等矩阵)**.** *设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶幂等矩阵当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n$.*

Problem 1.4 (**Sylvester 不等式**)**.** *设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$, $\boldsymbol{B}$ 为 $n \times k$ 阶矩阵, 证明*

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})-n.$$

Problem 1.5 (**Frobenius 不等式**)**.** *假设矩阵形状可以满足下式一切乘法, 证明*

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}).$$

Problem 1.6. *证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)$*

Problem 1.7. *设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 则对任意的非零常数 λ_0 均有*

$$m-\operatorname{rank}(\lambda_0\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=n-\operatorname{rank}(\lambda_0-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}).$$

我们以 n 维欧氏空间内的向量举例, 介绍**截断**与**补长**的概念. 对于一个 n 维列向量, 其 k 截断 $(k<n)$ 定义为其前 k 项分量形成的 k 维列向量; 其 m 补长 $(m>n)$ 指的是某一个 m 维列向量, 使得此向量的 n 截断为原向量. 注意补长的选取不是唯一的.

Propsition 1.2. 我们概述线性关系与截断和补长的关系.

(1) 线性相关向量组的截断仍然线性相关.

(2) 线性相关向量组的补长可能线性无关.

(3) 线性无关向量组的截断可能线性相关.

(4) 线性无关向量组的补长仍然线性无关.

通过此种方法和秩的行 (列) 向量空间维数的定义方式, 我们可以更好地理解某些矩阵秩不等式的关系.

2 矩阵相抵等价

利用矩阵的相抵标准型, 我们可以清晰明了地构造出一些零化关系, 秩的刻画等非显然的内容.

Theorem 2.1 (相抵标准型)**.** *一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以写成如下的形式, 其中 r 为矩阵的秩数, $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵.*

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_m\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}_n$$

Theorem 2.2. *数域 Ω 上 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相抵当且仅当他们的秩相等.*

Problem 2.1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 Ω 上的 $s \times n$ 矩阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r 当且仅当存在数域 Ω 上的 $s \times r$ 列满秩矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $r \times n$ 行满秩矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$.

Problem 2.2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 Ω 上的 $m \times n$ 矩阵, 其秩为 r. 试寻找秩为 $n-r$ 的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$. 思考: $n-r$ 的秩能更大吗?

3 矩阵的广义逆

矩阵的广义逆是求阶线性方程组之一路方法, 在了解了矩阵相抵标准型后, 我们便可以了解其相关内容. 在此笔者文墨有限, 谨截取丘维声先生《高等代数》上册广义逆矩阵相关内容, 此书内容细致翔实, 建议感兴趣读者购买原作, 当作高等代数参考书.

此处摘有趣画作一则, 以弥补讲义前文贫瘠的内容.

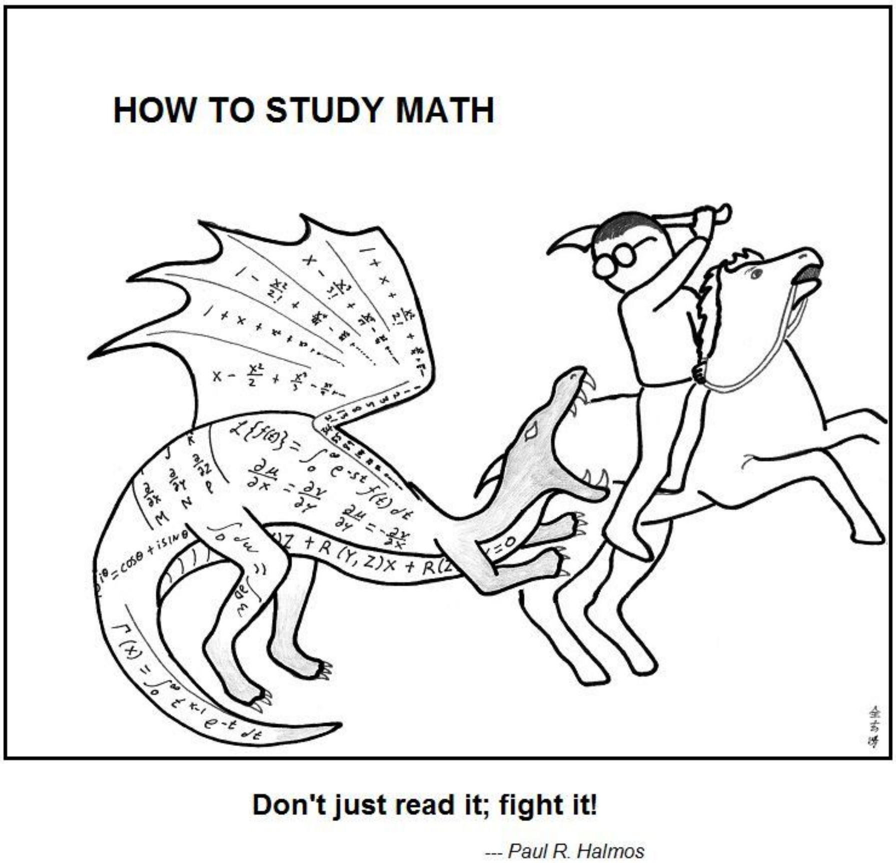

图 1: 不要光读, 动笔练习!