高等代数 I

第 8 次讨论班

2022 年 11 月 14 日

基础回顾

本次题目涉及内容为矩阵的行列式, 可逆矩阵相关. 矩阵的行列式求法可以如下考虑:

- 使用行列变化化简, 并考虑 Laplace 展开.
- 分解为矩阵乘积, 直接分别求行列式或应用 Binet-Cauchy 公式.

而关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的可逆性, 可以如下考虑:

- 找到一个同阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$.
- 找到一个同阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}$ 或 $\boldsymbol{BA}$ 可逆.
- 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 则 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵, 否则 $\boldsymbol{A}$ 为不可逆矩阵.

通常, 我们将可逆矩阵称为非奇异矩阵, 将不可逆矩阵称为奇异矩阵.

题目

问题 1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵, 证明前两个式子:

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}|;\quad \begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+i\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-i\boldsymbol{B}|;\quad \begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}$$

注记: 可以按书中的思路, 也可以联想分块矩阵乘法, 矩阵的行列式与乘积的关系. 思考: 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶矩阵, 其中 A 为可逆矩阵, 化简如上第三个行列式:

问题 2. 分析矩阵的可逆性质:

(1) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足等式 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 求证: $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ 都是可逆矩阵, 而若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}_n$ 则 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n$ 必不是可逆矩阵

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}$ 且 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$, 求证: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 必是奇异矩阵 (即不可逆矩阵).

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{AB}$ 可逆, 求证: $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{BA}$ 可逆.

问题 3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵, 证明:

$$\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}.$$

问题 4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 求证: $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

问题 5. 证明伴随矩阵的相关结论, 此处我们用 A^* 表示 A 的伴随矩阵.

(1) $(\boldsymbol{A}^T)^*=(\boldsymbol{A}^*)^T$.

(2) $(c\boldsymbol{A})^*=c^{n-1}\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, c 为常数.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆, 并且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

(4) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵.

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\,(n>2)$ 阶矩阵.

注记: (4), (5) 可先考虑可逆矩阵的情形, 不可逆情形留作思考.

问题 6. 使用 Binet-Cauchy 公式证明 Lagrange 恒等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 .$$

问题 7. 设 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$a_{ij}=s_{i+j-2},\quad s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,$$

求 $|\boldsymbol{A}|$ 的值, 并思考第 7 次讨论班循环矩阵的行列式求值问题.

问题 8. 计算下列 $n+1$ 阶矩阵的行列式的值:

$$\begin{pmatrix}(a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n\\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_n)^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n\end{pmatrix}$$