Linear Algebra I

Supplementaries - 8

ζ

November 14, 2022

注: 本次讲义拟提前给出一些知识点, 便于后续学习时的术语使用, 本讲义仅有最后部分的题目是需要做的, 其余有兴趣者可自行查阅学习.

1 线性空间及线性关系

1.1 线性空间及举例

线性空间亦称为向量空间, 它是线性代数的中心内容和基本概念之一. 我们常见的 n 维欧氏空间, $m \times n$ 矩阵, C$[0,1]$, 即 $[0,1]$ 区间的实值连续函数等都可以看作线性空间.

一个线性空间本质上是两个集合及两个映射. V 是一个非空集合, Ω 是一个域. 我们定义两个映射 $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \Omega \times V \to V$, 分别称为加法与数乘, 对 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$, $k, l \in \Omega$ 满足以下八个条件:

(i) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$, 对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$.

(ii) $\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma}$, 对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$.

(iii) 存在一个元素 $\mathbf{0}$, 使得对一切 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 都有 $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$.

(iv) 对任一 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 都存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 使得 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, 一般将 $\boldsymbol{\beta}$ 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

(v) 对 Ω 中的单位元 1, 有 $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$, 对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 成立.

(vi) 对任意 $k, l \in \Omega$, $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 有 $(kl)\boldsymbol{\alpha} = k(l\boldsymbol{\alpha})$.

(vii) 对任意 $k, l \in \Omega$, $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 有 $(k+l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$.

(viii) 对任意 $k \in \Omega$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 有 $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$.

这是我们在代数学习中遇到的第一个代数系统, 一部分结论不可认为显然而得. 以下我们举例几则, 从以上的系统中推得一些我们理所当然之结论.

Propsition 1.1. 在线性空间中, 以下结论成立

(i) 零元 $\mathbf{0}$ 是唯一的,
(ii) 任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的逆元是唯一的,
(iii) 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有 $0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,

(iv) 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有 $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$.

证明. 仅作思路概述

(i) 假设有另一零元 $\mathbf{0}'$, 则 $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$.

(ii) 假设对某一 $\boldsymbol{\alpha}$ 有两逆元 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}'$, 则 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}') = (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}'$

(iii) $0\boldsymbol{\alpha} = (0+0)\boldsymbol{\alpha} = 0\boldsymbol{\alpha} + 0\boldsymbol{\alpha}$, 则有 $0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

(iv) $\mathbf{0} = (1 + (-1))\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + (-1)\boldsymbol{\alpha}$, 由此可得 $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$.

□

下面我们给出几个线性空间的例子, 读者可以自行验证.

Example 1.1 (n 维欧氏空间)**.** *n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$, 在域 $\mathbb{R}$ 上为线性空间. n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 可以看作 n 长度的数对.*

Example 1.2 (同型矩阵)**.** *域 Ω 上的 $m \times n$ 型矩阵为一线性空间, 加法定义为矩阵加法, 数乘为 Ω 上, 在所有分量上作乘法.*

Example 1.3. *$[0,1]$ 区间上的所有连续函数, 记为 $C[0,1]$. 其关于函数的逐点加法, 和实数 $\mathbb{R}$ 的乘法成为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.*

1.2 线性相关性与基底

我们通过欧氏空间的例子引出线性相关性和基底的概念.

在欧式空间 (或看作矩阵) $\mathbb{R}^n$ 中, 我们有如下的形式的向量:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad , \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

我们发现我们常称之为 n 维空间之基底, 其原因为我们不可以通过 $k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n$ 的形式将其组合成为 $\mathbf{0}$, 否则只能有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$. 称此 n 向量线性无关.

而以另外三个向量为例, 如 $\boldsymbol{x}_1 = (1,2,3)^T$, $\boldsymbol{x}_2 = (1,1,1)^T$, $\boldsymbol{x}_3 = (0,2,4)^T$. 我们则可以写出 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_3$. 此时称这三个向量线性相关.

Definition 1.1 (线性相关性)**.** 若对于线性空间 V 中的某 m 个向量 $\boldsymbol{x}_i$, 存在一组非零的系数 k_i, 使得 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{x}_m = \mathbf{0}$, 则称这 m 个向量**线性相关**, 否则则称其**线性无关**.

形如以上线性组合的所有向量都称为**被 $\boldsymbol{x}_i$ 张成**, 所有能被 $\boldsymbol{x}_i$ 张成的向量与 $\mathbf{0}$ 构成了一个线性空间, 称为被向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ 张成的线性空间, 记为 $\mathrm{span}[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m]$.

若一个线性空间能够被其中有限个向量张成, 则称这个线性空间是有限维的, 否则称为无穷维的. 对于有限维线性空间, 生成它的向量个数的最小值 (证明是良定义的) 称为线性空间的维数, 记为 $n = \dim V$. 这 n 个向量此时称为线性空间 V 的基底.

线性空间的基底是线性无关的向量组, 任意 $\dim V$ 个线性无关向量的向量组张成的线性空间恰好为 V.

1.3 线性映射

Definition 1.2. Ω 上线性空间 V 到 W 的线性映射定义为 V 到 W 的映射 f, 满足

(i) $f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = f(\boldsymbol{\alpha}) + f(\boldsymbol{\beta})$,

(ii) $f(k\boldsymbol{\alpha}) = kf(\boldsymbol{\alpha})$.

其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, $k \in \Omega$.

我们跳过子空间的定义, 不了解的读者可自行查询.

Propsition 1.2. V 中线性无关向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$, 线性映射 $f : V \to W$ 在其上的取值 $f(\boldsymbol{x}_i)_{1 \le i \le m}$ 唯一确定了一个子空间上的线性映射

$$f_{ind} : \operatorname{span}[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m] \to W.$$

由此我们知道, 任意一个线性映射可以由原空间一组基底上的值唯一确定.

Definition 1.3. 给定 Ω 上线性空间 V 到 W 的线性映射 $f : V \to W$, 定义

$$\ker f = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \in W\}.$$
$$\operatorname{Im} f = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}.$$

验证两者分别为 V, W 的子空间.

Propsition 1.3. Ω 上有限维线性空间 V 到 W 有线性映射 f, 分别指定基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ 和 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$. 则线性映射 f 可给出矩阵表示

$$f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\, \boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

意味着 $f(\boldsymbol{v}_i) = a_{1i}\boldsymbol{w}_1 + a_{2i}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{w}_m$, $1 \le i \le n$.

关于有限维空间, 可以直接分别在 n 维欧氏空间和 m 维欧氏空间给出非平凡的基底, 然后自行出题加以练习.

我们发现虽然我们可以根据基底给出一个线性映射的刻画, 但似乎线性映射是两个线性空间之间内嵌的某个关系, 若我们变动一个基底, 那么这个矩阵刻画会有如何的变化? 现假设有另一组 V 的基底 $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$, 满足

$$(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\, \boldsymbol{P}_{n\times n}.$$

其中可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为**过渡矩阵**, 则有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \ldots, \boldsymbol{v}_n') &= f\left((\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{P}_{n\times n}\right) = f\left((\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\right)\boldsymbol{P}_{n\times n} \\ &= (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\,\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{P}_{n\times n}. \end{aligned}$$

思考: 为什么矩阵可以提到 f 外面来? 若线性变换为 V 到 V 的, 并把两组基底取成相同一组, 那么矩阵表示在变动基底时会有什么变化?

为了便于理解线性映射, 我们再给出几个例子, 其中的线性空间未必是有限维的.

Example 1.4. *记 $C^1[0,1]$ 为区间 $[0,1]$ 上的连续可微函数 (导函数连续的函数) 构成的线性空间, 则***微分函子** *d 是 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的线性映射.*

$$d : g \in C^1[0,1] \to g' \in C[0,1].$$

且 $\ker d = \{g \in C^1[0,1] \mid g \equiv \text{const}\}$.

2 等价关系构造映射

等价关系构造映射的思想来源于很多领域, 其本质是将等价关系的等价类" 浓缩" 为一点, 由此便可以生成新的结构. 为了诱导新的映射, 我们要求所考虑的映射在等价类上取相同的值. 粗浅地讲, 我们进行了如下过程.

Propsition 2.1. 设 f 为集合 S 到集合 T 的映射, $\sim$ 为 S 上的一个等价关系. 若 $x \sim y \in S$ 时有 $f(x) = f(y)$, 则存在一个诱导的映射 $\tilde{f} : \tilde{S} = S/\sim \to T$. 其中 $S/\sim$ 指的是 S 商去等价关系, 即将等价类看作一个元素. 我们还有商映射 $\pi : S \to \tilde{S}$, $\pi : x \to [x]$, 将每个元素映射至其等价类.

在某些特殊结构上, 我们可以得到很多丰富的结果, 我们列举如下几则, 感兴趣可自行查阅.

(1) $f : V \to W$ 为线性空间之间的线性映射, 等价关系取 $x \sim y$ 当且仅当 $x - y \in \ker f$. 由 $\ker f$ 子空间诱导.

(2) $\phi : G \to H$ 为群之间的同态, 等价关系取 $x \sim y$ 当且仅当 $x^{-1}y \in \ker\phi$. 由 $\ker\phi$ 正规子群诱导.

(3) $\phi : R \to S$ 为环之间的同态, 等价关系取 $x \sim y$ 当且仅当 $x - y \in \ker\phi$. 由 $\ker\phi$ 环的理想诱导.

(4) $f : X \to Y$ 为拓扑空间之间的连续映射, 等价关系取 $x \sim y$ 可自行构造, 则可诱导商空间与商拓扑.

(5) 任意两个 R 模 M, N, 其张量积 $M \otimes N$ 是在其笛卡尔积生成的模上取等价关系 $(rm, n) \sim (m, rn)$, 其中 $m \in M$, $n \in N$, $r \in R$.

3 Kronecker 积 (Tensor Product)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 分别是 $m\times n$ 阶和 $k\times l$ 阶矩阵, 定义他们的 Kronecker 积为一个 $mk\times nl$ 阶矩阵:

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \dots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \dots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m1}\boldsymbol{B} & \dots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

Problem 3.1. *证明矩阵的 Kronecker 积满足下列性质 (假设以下的矩阵加法和乘法都有意义):*

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C}$;

(2) $\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})\otimes\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\otimes(k\boldsymbol{B})$;

(4) $\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{I}_{mn}$;

(5) $(\boldsymbol{AB})\otimes(\boldsymbol{CD})=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{D})$;

(6) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C})$;

(7) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ *都是可逆矩阵, 则* $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ *也是可逆矩阵, 并且*

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{B}^{-1};$$

(8) 若 $\boldsymbol{A}$ *是* m *阶矩阵,* $\boldsymbol{B}$ *是* n *阶矩阵, 则* $|\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{B}|^m$.

4 矩阵可逆性刻画

Problem 4.1. *n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为零的***充分必要***条件是, 其某行 (列) 可以表示为其它行 (列) 的线性组合. (我们在行列式运算中曾了解充分性, 其实此命题是充分必要的)*

Problem 4.2. *我们称一个矩阵是***行对角占优***的, 指对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij}, 有*

$$|a_{ii}|\geq\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}|a_{ij}|\quad(i=1,\dots,n)$$

*如果上述定义的不等式都严格成立, 则称为***行严格对角占优矩阵***.*

证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 具有严格对角占优, 则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵; 如果此外 A 的主对角线元素均为正数, 则 $\boldsymbol{A}$ 的行列式大于零.