高等代数 I

第 7 次讨论班

2022 年 11 月 1 日

问题 1. 请思考以下问题

(i) 写出矩阵乘法法则, 并证明矩阵的乘法结合律.

(ii) 利用矩阵乘法法则, 写出矩阵乘积 ABC 的各分量值, 其中 A 为 $m \times n$, B 为 $n \times k$, C 为 $k \times l$ 型矩阵, $m, n, k, l \in \mathbb{N}^*$.

(iii) 叙述矩阵迹 (trace) 的定义, 并给出它的一些性质.

(iv) 叙述矩阵的转置, 共轭, 共轭转置的定义; 对角矩阵, 纯量矩阵的定义.

(v) 叙述上 (下) 三角矩阵; (反/斜) 对称矩阵, (反/斜)Hermite 矩阵的定义.

(vi) 叙述正交矩阵, 酉矩阵; 正规矩阵; 幂零矩阵, 幂等矩阵, 对合矩阵的定义.
(按照分号以类记忆)

问题 2. 计算矩阵的乘积幂

(i) 设

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

求证:

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-k} \\ \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

(ii) 设

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试求它的 k 次幂.

问题 3. 求证:

(i) 任一 n 阶矩阵均可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

(ii) $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

(iii) $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵.

(iv) $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵, $\boldsymbol{U}$ 为酉矩阵. 证明: $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵当且仅当 $\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 是正规矩阵.

问题 4. 关于对角矩阵的交换性.

(I) 求证: 和所有 n 阶矩阵乘法可交换的矩阵必是纯量矩阵 $k\boldsymbol{I}_n$.

(II) 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1\boldsymbol{E}_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & a_2\boldsymbol{E}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & a_r\boldsymbol{E}_r \end{pmatrix}$$

为分块对角矩阵, 且当 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$, $\boldsymbol{E}_i$ 是 n_i 阶单位矩阵, 证明: 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵只能是如下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{A}_r \end{pmatrix}$$

其中 A_i 为任意 n_i 阶矩阵.

问题 5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量. 证明: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$.

问题 6. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零的 n 维列向量, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 证明 A 是正交矩阵.

(关于这个公式的形式从何而来, 我们不妨先考虑平面上向量. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是平面上某一非零向量, 则其确定其所在直线; 此时对于任一其它非零向量 $\boldsymbol{\beta}$, 它关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 所在直线的对称向量 $\boldsymbol{\beta}'$ 是什么样子?)

问题 7. * 下列形状的矩阵称为循环矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

求证: 同阶循环矩阵之积仍是循环矩阵.

(**Hints**: 考察问题 2. **注记**: 在学习矩阵运算与行列式的关系后, 我们可以求得一般循环矩阵的行列式的值, 感兴趣可以自行查阅.)

问题 8. (空间解析几何) 在空间直角坐标系中, 求下列直线绕 z 轴旋转所得旋转曲面的方程.

$$\begin{cases} z = ax + b \\ z = cy + d \end{cases}$$

其中 a, c 都不为零.