Linear Algebra I

Supplementaries - 7

ζ

November 10, 2022

注: 本人对题目的原创性毫无贡献, 大部分内容选材自谢启鸿老师的教材及讲义.

1 行列式计算

1.1 矩阵分解法

Problem 1.1. 计算下列循环矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

Problem 1.2. 计算下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \dots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \cos 2\theta & \dots & \cos(n-1)\theta \\ \cos(n-1)\theta & \cos n\theta & \cos\theta & \dots & \cos(n-2)\theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \dots & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Problem 1.3. 设多项式

$$f_k(x) = c_{k,n-1}x^{n-1} + \cdots + c_{k,1}x + c_{k,0}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \dots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \dots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \dots & f_n(a_n) \end{pmatrix}$$

试求其矩阵乘积分解, 以此我们可以获得特殊情况行列式一个求法.

1.2 Binet-Cauchy 公式

Problem 1.4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 的实矩阵, 求证:

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}||\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}|\geq|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}|^2$$

1.3 降阶公式

降阶公式来自于矩阵初等变换下的行列式求值, 可以得到不同行列式的一个恒等式, 首先考虑以下问题:

Problem 1.5. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{D}$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为 $n\times m$ 矩阵, 则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

若仅有 $\boldsymbol{D}$ 可逆, 则有

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|$$

则当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 都可逆时, 我们有等式:

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|$$

接下来见几道例题

Problem 1.6. 求下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3 & \dots & n\\ 1 & 0 & 3 & \dots & n\\ 1 & 2 & 0 & \dots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

Problem 1.7. 计算下列矩阵的行列式的值, 其中 $a_i\neq 0\,(1\leq i\leq n)$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n\\ a_2+a_1 & 0 & \dots & a_2+a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

2 迹及其应用

首先列举迹的基本性质, 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, 则有
(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$

(2) $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A}) = k(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})$
(3) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T) = (\mathrm{tr}\boldsymbol{A})$
(4) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = (\mathrm{tr}\boldsymbol{BA})$

2.1 迹与特殊矩阵

Problem 2.1. 证明下列结论:
(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}) \geq 0$, 等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$;
(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}) \geq 0$, 等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

Problem 2.2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}^2$, 求证: $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵. (提示: 利用上题结论)

Problem 2.3. 证明: 不可能存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} = k\boldsymbol{I}_n$, 其中 $k \in \mathbb{F}$ 非零.

Problem 2.4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 矩阵, 试考虑 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})$ 与 $\mathrm{tr}\boldsymbol{BA}$ 的关系.

Problem 2.5. 若 n 阶实矩阵满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{I}_n$, 则称为正交矩阵. 证明: 不存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 满足 $\boldsymbol{A}^2 = c\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$, 其中 c 是非零常数.

2.2 迹的刻画

Problem 2.6. 设 f 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵集合到 $\mathbb{F}$ 的一个映射, 它满足下列条件:
(1) 对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, $f(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = f(\boldsymbol{A}) + f(\boldsymbol{B})$;
(2) 对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $k \in \mathbb{F}$, $f(k\boldsymbol{A}) = kf(\boldsymbol{A})$;
(3) 对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, $f(\boldsymbol{AB}) = f(\boldsymbol{BA})$;
(4) $f(\boldsymbol{I}_n) = n$.
求证: f 就是迹, 即 $f(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 对一切 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 成立.

3 矩阵的逆

Problem 3.1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量, 且 $1 + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{\alpha} =\neq 0$. 求证:

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \frac{1}{1 + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}.$$

注记: 上述公式称为 *Sherman-Morrison* 公式.

Problem 3.2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 均为 n 阶矩阵.
(1) 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, 证明: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}$.
(2) 若存在正整数 k, 使得 $(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{O}$, 证明: $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}$ 是可逆阵.
(3) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{B}$ 均为可逆阵, 证明: $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{C}$ 也是可逆阵, 并求其逆矩阵.

4 摄动法

Problem 4.1. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 是 n 阶矩阵且 $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$, 求证:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CB}|.$$

Problem 4.2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 证明有

$$|\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{BA}|.$$