高等代数 I

第 6 次讨论班

2022 年 11 月 2 日

问题 1. 请思考以下问题

(i) 请给出你知道的行列式值的定义.

(ii) 请给出行列式值的一些计算性质.

问题 2. 计算行列式的值

(i) 计算行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

(ii) 计算 n 阶行列式 $(a_i \neq 0)$:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

问题 3. 证明题

(i) 设 $|\boldsymbol{A}| = |a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式, A_{ij} 是它的第 (i, j) 元素的代数余子式, 求证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 1 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j$$

(ii) 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 x 是未知数, a_{ij} 是常数. 证明: $f(x)$ 是一个最高次项系数为 1 的 n 次多项式, 且其 $n-1$ 次项的系数等于 $-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$.

问题 4. 三线型的计算

(i) 求下列 $n+1$ 阶行列式的值, 其中 $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

(ii) 计算 n 阶行列式 $(bc \neq 0)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$$

问题 5. * 上下分块型矩阵, 计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ y & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ y & \dots & y & a_n \end{vmatrix}$$

问题 6. 其他类型题目:

1. 计算:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}$$

2. 计算下列行列式:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

问题 7. (空间解析几何) 在空间仿射坐标系中, 直线 l_1, l_2 分别有一般方程如下:

$$l_1 : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x - y + 2z = 0, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 3x - z + 1 = 0, \\ y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

(i) 写出经过 l_1, 并且平行于 l_2 的平面的方程;

(ii) 求与 l_1, l_2 都共面, 并且平行于向量 $\boldsymbol{u}(1,2,1)$ 的直线的方程.