高等代数 I

第 5 次讨论班

2022 年 10 月 14 日

基础回顾

1. 将下列对称多项式化为初等对称多项式的多项式：
   (i) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$,
   (ii) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2$,

2. 设方程 $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ $(p \neq 0)$ 的三个根为 a, b, c, 试计算: $(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2)$.

3. 设多项式 $x^3 + px^2 + qx + r$ 的三个根都是实数, 求证：$p^2 \geqslant 3q$.

4. 若 n 是奇数, 求证：$(x + y)(y + z)(x + z)$ 可整除 $(x + y + z)^n - x^n - y^n - z^n$.

强化训练

1. 设 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) = \left\{a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + a_2\sqrt[n]{4} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} \mid a_i \in \mathbb{Q},\ 0 \leq i \leq n-1\right\}$, 求证 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 是一个数域. (Hints: 第 3 次讲义第 8 题)

2. 设 $f(x)$ 是有理数域上的多项式, 若 $a + b\sqrt{c}$ 是 $f(x)$ 的根, 其中 a, b, c 是有理数, $\sqrt{c}$ 是无理数. 求证: $a - b\sqrt{c}$ 也是 $f(x)$ 的根.

空间解析几何

在一个仿射坐标系中, 三张平面的方程为

$$\begin{aligned}
\pi_1 &: ax + y + z + 1 = 0, \\
\pi_2 &: x + ay + z + 2 = 0, \\
\pi_3 &: x + y - 2z + 3 = 0,
\end{aligned}$$

讨论 a 变化时, 三张平面的位置关系.

拓展话题 (选讲)

根与不可约多项式

1. 设 $p(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的不可约多项式,$f(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的多项式. 证明: 若 $p(x)$ 的某个根 α 也是 $f(x)$ 的根, 则 $p(x) \mid f(x)$. 特别地, $p(x)$ 的任一复根都是 $f(x)$ 的根.

   (由此理解为什么域的扩张不影响最大公因式, 以及为什么在某个特定域上的不可约分解能决定两多项式的最大公因式)

2. 设 u 是复数域中某个数, 若 u 适合某个非零有理系数多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则称 u 是一个**代数数**. 证明:

   (i) 对任一代数数 u, 存在唯一一个 u 适合的首一有理系数多项式 $g(x)$, 使得 $g(x)$ 是 u 适合的所有非零有理系数多项式中次数最小者. 这样的 $g(x)$ 称为 u 的极小多项式. (注: u 适合 $g(x)$ 指的是 u 为 $g(x)$ 的根).

   (ii) 设 $g(x)$ 是一个 u 适合的首一有理系数多项式, 则 $g(x)$ 是 u 的极小多项式的充要条件是 $g(x)$ 是有理数域上的不可约多项式.

插值与中国剩余定理

1. **(插值公式)** 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是域 $\mathbb{F}$ 上互异的数, 设另有 $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{F}$. 求证：存在一个次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. 设 $f(x)$ 是一个 n 次多项式, 若 $k = 0, 1, \cdots, n$ 时有 $f(k) = \dfrac{k}{k+1}$, 求 $f(n+1)$.

3. **(中国剩余定理)** 设 $\{f_i(x) \mid i = 1, \cdots, n\}$ 是两两互素的多项式, $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ 是 n 个多项式. 求证: 存在多项式 $g(x)$, 适合 $g(x) = f_i(x)q_i(x) + a_i(x)$, $(i = 1, \cdots, n)$.