高等代数I

第4次 讨 论 班

2022 年 10 月 8 日

1. (基础回顾) 叙述以下的概念或性质
   a) 叙述数域Ω上既约多项式的定义，并给出其几个性质
   b) 叙述代数学基本定理
   c) 复数域、实数域、有理数域上的既约多项式可能有哪些形式?
   d) 叙述本原多项式的概念, 本原多项式的高斯引理
   e) 整系数多项式在整数域与有理数域上既约性的关系，为什么?
   f) 叙述整系数多项式的 Eisenstein 判别法

2. 判断以下多项式是否为给定域上的既约多项式, 并给出理由.
   a) $f(x) = x^2 + i$, 在$\mathbb{C}$上
   b) $f(x) = x^2 + 1$, 在$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$上
   c) $f(x) = x^3 + x - 4$, 在$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$上
   d) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 14x - 2$, 在$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$上
   e) $f(x) = x^4 + 1$, 在$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$上

3. 设$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$的n个根为$x_1, \cdots, x_n$.求:
   a) $\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}$　　b) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$　　c) $\sum_{i=1}^{n} x_i^{-2}$

4. 证明对于一元复多项式 $f(x)$, 存在一对二元实多项式 $u(x, y), v(x, y)$ 使得
   $$f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y).$$
   举例说明存在二元实多项式 $u(x, y), v(x, y)$ 使得 $u(x, y) + iv(x, y)$ 不是 $x + yi$ 的多项式.

5. 设 p 是素数. 证明 $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的既约多项式.

6. 设$f \in \mathbb{R}[x]$,且在$\mathbb{R}$上恒有$f(x) \geq 0$.证明有$g, h \in \mathbb{R}[x]$ 使得 $f = g^2 + h^2$.

7. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互异的整数. 证明 $(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) - 1$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的既约多项式.

8. 证明: $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) + (\vec{\alpha} \times \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) + (\vec{\alpha} \times \vec{\gamma}) \cdot (\vec{\delta} \times \vec{\beta}) = 0.$