高等代数 I

第 3 次讨论班

2022 年 11 月 2 日

1. **(基础题)** 证明下述结论（整除、最大公因式、最小公倍式）.

   a) 设 $f, g, h \in \Omega[x]$. 若 $f|h, g|h$, 且 f, g 互质, 则 $fg \mid h$.

   b) 设 f, g 都是首一多项式, 则 $[f, g] = \dfrac{fg}{(f, g)}$.（考虑两种证法，思考 $[f, g, h] = \dfrac{fgh}{(f, g, h)}$ 是否成立?）

   c) $(f^n, g^n) = (f, g)^n$. (思考为什么在某个域上的不可约因式分解可以决定最大公因式?)

2. **(基础题)** 证明 Ω 上非常数多项式, 在 Ω 上有有限个根, 且个数至多为多项式的次数.

3.**（选讲，考虑用两种方法）**证明

$$[[f, g], h] = [f, [g, h]], \quad [f, (g, h)] = ([f, g], [f, h]), \quad (f, [g, h]) = [(f, g), (f, h)].$$

4. 证明函数 $f(x) = \sin(x)$ 不能表示为实多项式.

5. 求 $x^5 + 7x^4 + 18x^3 + 22x^2 + 13x + 3$ 的所有不可约因式

6. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式, a, b, c 是三个互异的整数. 证明不可能有

$$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a.$$

7. 证明: $x^2 + x + 1 \mid (x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2})$，其中 $m, n, k \in \mathbb{N}$.

8. **(提高题)** 设 f 是 Ω 上的 n 次既约多项式, u 是 f 在 $\mathbb{C}$ 中的一个根, $\Omega[u] = \{h(u) \mid h(x) \in \Omega[x]\}$.

   证明：

   (a) $\Omega[u] = \{h(u) \mid h(x) \in \Omega[x], \deg h(x) \leq n - 1\}$;

   (b) $\Omega[u]$ 是数域.

9. 证明: 四点 A, B, C, D 共面的充分必要条件为：存在不全为 0 的数 $\lambda, \mu, \nu, \omega$, 使得 $\lambda + \mu + \nu + \omega = 0$, 并且 $\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC} + \omega\overrightarrow{OD} = 0$. 其中 O 是任意点.

$$\pi_1 : ax + y + z + 1 = 0,$$

$$\pi_2 : x + ay + z + 2 = 0,$$

$$\pi_3 : x + y - 2z + 3 = 0,$$