高等代数 I

第 10 次讨论班

2022 年 11 月 21 日

问题 1. 回答等价关系的相关问题

(1) 叙述等价关系的定义,

(2) 证明: $\mod a,\, a \in \mathbb{Z}^+$ 的同余是等价关系,

(3) 两个 n 阶矩阵称为**相似 (合同)**, 如果有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$). 证明: 相似和合同都是 n 阶矩阵集合上的等价关系,

(4) 给定数对 $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$, 给定关系 $(a,b) \sim (c,d)$ 当且仅当 $ad = bc$, 证明这是一个等价关系.

问题 2. 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 使得下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{PAQ}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准型.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

定义 1. 在进入秩数的问题前, 我们先规定所使用的术语.

A. 设 $\boldsymbol{G}$ 是 $m \times r\,(r < m)$ 矩阵, 则若矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的矩阵秩等于 r, 称其为**列满秩矩阵**;

B. 一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**左 (右) 可逆矩阵**, 若存在 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$ ($\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_m$); 此时 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**左 (右) 逆**;

C. 对于一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 若存在 $k \times m$ 非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}_{k \times n}$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**左零化子**, 同理可以定义**右零化子**.

问题 3. 证明课本的**定理 3.9.2**. 即设 $\boldsymbol{G}$ 是 $m \times r\,(r < m)$ 矩阵, 则下列陈述等价:

(1) $\boldsymbol{G}$ 为列满秩矩阵;

(2) $\boldsymbol{G}$ 有一个 r 阶非奇异子块;

(3) $\boldsymbol{G}$ 行等价于 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

(4) 有矩阵 $\boldsymbol{H}$ 使得 $(\boldsymbol{G}\ \boldsymbol{H})$ 是可逆矩阵;

(5) 有矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使得 $\boldsymbol{KG} = \boldsymbol{I}_r$, 即 $\boldsymbol{G}$ 有左逆;

问题 4. 设 $\boldsymbol{G}$ 是 $m \times n\,(n < m)$ 矩阵, 若矩阵的秩数 $r < n$, 证明 $\boldsymbol{G}$ 有右零化子; 若 $r = n$, 证明 $\boldsymbol{G}$ 没有右零化子.

问题 5. 证明 $\boldsymbol{C}$ 为列满秩矩阵当且仅当 $\det \boldsymbol{C}^H\boldsymbol{C}$.

扩展话题

我们发现, 关于课本内列满秩矩阵的相关证明, 是纯矩阵观点下的. 似乎些结论并不方便瞥见列满秩矩阵的本质, 因此亦不便进行记忆. 为便学习理解, 我们在此提前引出相关内容. 尽管此种方法是更加直观的, 原始的矩阵方法也应熟稔于心. 在此节中, 我们不加以严格定义地引用课本接下来章节的概念, 有兴趣的同学可以自行查阅.

在我们定义列满秩矩阵时, $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总是满足 $n \leq m$, 而列满秩恰为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n$ 的情况. 实际上, 列满秩的本质定义为"列空间满秩", 而此时列空间满秩恰好对于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n$.

观察到, 一个 $m \times n$ 的矩阵可以看作 n 个 $m \times 1$ 的列向量, 亦可以看作 m 个 $1 \times n$ 的行向量. 正如我们在解析几何中所见, 一个向量可以生成线, 两个不共线向量生成平面, 三个不共面的向量生成三维空间. 我们一般所称的**列 (行) 空间**便指的是所对应**列 (行) 向量组**张成的空间.

在解析几何中我们会把向量做**线性组合**, 以得到所张成空间的所有向量. 矩阵的左乘和右乘分别对应行空间和列空间的向量组的组合. 注意到 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个 $n \times 1$ 列向量恰好得到 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的某一个线性组合.

在三维欧氏空间里面取四个非零向量, 总有一个向量可以被其它三个向量线性组合表示出来, 这样的性质便称为**线性相关**. 若某向量组没有这样的性质, 则称为**线性无关**. 一个向量组最多选出 r 个线性无关的向量组, 则称向量组的**秩数**为 r, 称其张成空间的**维数**为 r. 秩数刻画了一个向量组本质上有多少个"有用的" 向量.

定义 2. 一个矩阵的列向量组的秩数, 或列向量组生成的列空间的维数, 称为矩阵的**列秩**. 同理地可以定义**行秩**.

我们有如下结论, 感兴趣的同学可尝试证明:

定理 1. *在任何情况下, 矩阵的秩 = 矩阵的行秩 = 矩阵的列秩.*

一般地, 一个 $m \times n$ 的矩阵的三个秩数必然会小于 $\min\{m, n\}$, 这也是我们在课本的列满秩定义中要求 $n \leq m$ 的原因. 在此我们给出列满秩的另一个定义. 上述定理确保了课本定义与下述定义的一致性.

定义 3. 若 $m \times n (n \leq m)$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩恰好为 n, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**列满秩矩阵**.

在此止步, 回望前述的定理结论等, 是否豁然开朗?